Pengaruh Kenon-Unitalan Modul Terhadap Hasil Kali Tensor

Oleh :
Nikken Prima Puspita
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Semarang 50275
email : nikkenprima@yahoo.com

ABSTRAK. Pembahasan tentang teori modul oleh [5] dibagi menjadi modul unital dan modul non unital. Grup Abel M yang memenuhi aksioma untuk menjadi R-modul kecuali aksioma unital disebut R-modul non unital. Pada kenyataanya ring dengan elemen satuan tidak selalu menjamin bahwa aksioma unital modul tersebut dipenuhi. Dalam paper ini dijelaskan tentang hasil kali tensor dari modul non unital atas ring dengan elemen satuan. Beberapa sifat khusus seperti isomorfisma pada hasil kali tensor pada modul unital tidak dapat dipertahankan oleh modul non unital.
Kata Kunci : aksioma unital**,** modul non-unital, modul unital, hasil kali tensor

I. PENDAHULUAN

Modul adalah struktur yang diperoleh melalui operasi pergandaan skalar (aksi) antara grup Abel dan ring. Pada umumnya modul yang lebih banyak dikenal adalah modul unital. Definisi aksioma unital untuk R-modul kiri M adalah $(\forall m \in M)1 \cdot m = m.$ Pada [5] pembahasan tentang modul dibagi menjadi modul unital dan modul non-unital. Berbeda dengan modul unital, ring di modul non-unital tidak harus dilengkapi dengan elemen satuan 1. Pada kenyataanya, ring dengan elemen satuan pun tidak menjamin modul yang terbentuk pasti bersifat unital. Modul non-unital atas ring dengan elemen satuan inilah yang menjadi latar belakang penulisan paper ini.

Untuk setiap R-modul kiri unital N dan R-modul kanan unital M dapat dibentuk hasil kali tensor antara M dan N yaitu $M \otimes_R N$. Hasil kali tensor tersebut memenuhi beberapa sifat-sifat tertentu. Permasalahanya adalah apakah keunitalan sebuah modul akan berpengaruh terhadap hasil kali tensor yang terbentuk. Pada tulisan ini untuk modul unital cukup ditulis dengan modul saja. Penulis menganggap bahwa pembaca telah memahami konsep Teori Modul unital, sehingga tidak perlu diberikan penjelasan tentang hal tersebut.

II. HASIL KALI TENSOR

Bagian ini memberikan definisi hasil kali tensor modul unital beserta sifat-sifatnya. Sebelumnya dijelaskan tentang pengertian pemetaan bilinear dan seimbang *(”balanced”)* dalam hubungannya dengan pembentukan hasil kali tensor. Definisi dan sifat-sifat berikut diambil dari [5].

Definisi 2.1 *Diberikan R-modul kanan M, R-modul kiri N dan grup Abel $(G,+)$. Pemetaan $\beta : M \times N \to G$ disebut fungsi bilinear dan seimbang atas R jika untuk setiap $m_1, m_2 \in M$, $n_1, n_2 \in N$ dan $r \in R$ berlaku*

(i). $\beta(m_1 + m_2, n_1) = \beta(m_1, n_1) + \beta(m_2, n_1)$

(ii). $\beta(m_1, n_1 + n_2) = \beta(m_1, n_1) + \beta(m_1, n_2)$

(iii). $\beta(m_1 r, n_1) = \beta(m_1, r n_1)$ *(Balance)*

Definisi hasil kali tensor dari M dan N dijelaskan dalam definisi berikut.

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema ”Peningkatan Kontribusi Penelitian dan Pembelajaran Matematika dalam Upaya Pembentukan Karakter Bangsa ” pada tanggal 27 November 2010 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Definisi 2.2 *Diberikan R-modul kanan M, R-modul kiri N dan sebarang grup Abel $(G,+)$. Grup Abel $M \otimes_R N$ beserta fungsi bilinear dan seimbang τ disebut* ***hasil kali tensor*** *dari M dan N jika untuk setiap pemetaan bilinear dan seimbang $\beta : M \times N \to G$ terdapat dengan tunggal pemetaan $\overline{\beta} : M \otimes_R N \to G$ sedemikian hingga diagram berikut komutatif, yaitu $\beta = \overline{\beta} \circ \tau$.*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\tau"'] & G \\ M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\exists\overline{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Figure 1 : *Diagram hasil kali tensor*

Elemen-elemen dari $M \otimes_R N$ dinyatakan dengan $\left\{\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i \,\middle|\, m_i \in M \text{ dan } n_i \in N\right\}$.

Teorema 2.3 *Diberikan R-modul kanan M dan R-modul kiri N. Hasil kali tensor dari M dan N tunggal.*

Lemma 2.4 *Jika $M \otimes_R N$ adalah hasil kali tensor dari R-modul kanan M dan R-modul kiri N, maka untuk setiap $m_1, m_2 \in M$, $n_1, n_2 \in N$, dan $r \in R$ berlaku*

(i). $(m_1 + m_2) \otimes n_1 = m_1 \otimes n_1 + m_2 \otimes n_1$

(ii). $m_1 \otimes (n_1 + n_2) = m_1 \otimes n_1 + m_1 \otimes n_2$

(iii). $mr \otimes n = m \otimes rn$

(iv). $m \otimes 0 = 0 \otimes n = 0$

Definisi 2.5 *Hasil kali tensor homomorfisma $f : M \to M'$ dan $g : N \to N'$ adalah pemetaan*

$$f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$$

dengan definisi $(\forall m \otimes n \in M \otimes_R N)$ $f \otimes g(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$

Teorema 2.6 *Diberikan homomorfisma R-modul kanan $f : M \to M'$, $f' : M' \to M''$ dan homomorfisma R-modul kiri $g : N \to N'$, $g' : N' \to N''$. Sifat-sifat berikut dipenuhi*

(i). $Id_M \otimes Id_N = Id_{M \otimes_R N}$

(ii). $f \otimes o_N = o_M \otimes g = o$

(iii). $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = f' \circ f \otimes g' \circ g$

Proposisi berikut ini menjelaskan bahwa hasil kali tensor mempertahankan keeksakan kanan barisan modul-modul.

Proposisi 2.7 *Diberikan barisan eksak kanan dari R-modul kiri* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$. *Untuk setiap* R*-modul kanan* D *barisan* $D \otimes_R A \xrightarrow{I_D \otimes f} D \otimes_R B \xrightarrow{I_D \otimes g} D \otimes_R C \to 0$ *juga eksak kanan.*

Berdasarkan pengertian hasil kali tensor, [5] dapat menunjukkan eksistensi isomorfisma didalam hasil kali tensor melalui tiga teorema berikut:

Teorema 2.8 *Untuk setiap R-modul kanan* A *dan* R*-modul kiri* B, *maka* $A \otimes_R R \cong A$ *dan* $R \otimes_R B \cong B$.

Bukti:

Diketahui $R = (R, R)$-bimodul, maka dapat dibentuk $A \otimes_R R$ dan $R \otimes_R B$.

Jika dibentuk pemetaan $\alpha : A \otimes_R R \to A$ dengan definisi $(\forall a \otimes r \in A \otimes_R R)\alpha(a \otimes r) = ar$ dan pemetaan $\beta : A \to A \otimes_R R$ dengan definisi $(\forall a \in A)\beta(a) = a \otimes 1_R$, diperoleh $\alpha \circ \beta = I_A$ dan $\beta \circ \alpha = I_{A \otimes_R R}$ atau $A \otimes_R R \cong A$.

Analog untuk $R \otimes_R B \cong B$. □

Teorema 2.9 *Untuk setiap R-modul kanan* A, (R, S)*-bimodul* B *dan* S*-modul kiri* C, *maka* $(A \otimes_R B) \otimes_S C \cong A \otimes_R (B \otimes_S C)$.

Teorema 2.10 *Untuk setiap keluarga* R*-modul kanan* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *dan* R*-modul kiri* B, $\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \otimes_R B = \sum_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \otimes_R B)$.

III. MODUL NON-UNITAL

Pada [5] pembahasan tentang modul terbagi menjadi dua bagian yaitu modul unital dan modul non-unital. Berbeda dengan modul unital, pada modul non-unital struktur ringnya tidak harus dilengkapi dengan elemen satuan. Untuk lebih jelas contoh berikut dapat dijadikan motivasi munculnya definisi modul non-unital.

Contoh 3.1 Diberikan ring $\mathbb{Z}$. Himpunan $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ merupakan subring dari $\mathbb{Z}$ yang tidak mempunyai elemen satuan, yaitu $1 \notin 2\mathbb{Z}$. Pada $2\mathbb{Z}$ didefinisikan sebuah aksi atas dirinya sendiri yaitu

$$2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z},\ (2n, 2m) \mapsto 2(2nm).$$

Terhadap aksi tersebut, $2\mathbb{Z}$ memenuhi semua aksioma untuk menjadi sebuah modul kecuali aksioma unital, sebab $2\mathbb{Z}$ tak mempunyai elemen satuan. Jadi $2\mathbb{Z}$ merupakan modul non-unital atas dirinya sendiri.

Contoh 3.1 dapat dijadikan motivasi munculnya definisi modul-non unital berikut yang diambil dari [5] dan [9] sebagai berikut.

Definisi 3.2 (Modul non-unital) *Diberikan ring* A *(tidak harus mempunyai elemen satuan). Grup Abel* M *terhadap sebuah aksi kiri* ${}_M\alpha : A \times M \to M$, $(a, m) \mapsto am$ *disebut* A***-modul kiri non-unital*** *jika untuk setiap* $r_1, r_2 \in R$ *dan* $m_1, m_2 \in M$ *aksioma berikut dipenuhi:*

(i). $r_1(m_1 + m_2) = r_1 m_1 + r_1 m_2$

(ii). $(r_1 + r_2)m_1 = r_1 m_1 + r_2 m_1$

(iii). $(r_1r_2)m_1 = r_1(r_2m_1)$

Definisi untuk A-modul kanan dan (A,B)-bimodul non-unital diperoleh dengan cara yang analog. Homomorfisma pada A-modul non-unital didefinisikan dengan cara yang sama seperti pada Homomorfisma A-modul. Pada kasus ring dengan elemen satuan, tidak selalu menjamin bahwa modul yang terbentuk akan selalu memenuhi aksioma unital.

Contoh 3.3 Diberikan A-modul kiri M dan hasil kali kartesian $A\times A = \{(a_1,a_2)|a_1,a_2 \in A\}$. Himpunan $A\times A$ adalah ring dengan elemen satuan dengan definisi operasinya $(\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in A\times A)$

1. $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$
2. $(a_1,a_2).(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2)$.

Kemudian pada M didefinisikan aksi kiri ${}_M\alpha:(A\times A)\times M \to M$, $(\forall(a_1,a_2)\in A\times A)(\forall m\in M)$ ${}_M\alpha((a_1,a_2),m)=(a_1,a_2)m = a_1m+a_2m.$ Terhadap aksi kiri ${}_M\alpha$, M merupakan $A\times A$-modul kiri non-unital.

Bukti:

Berdasarkan aksioma yang dimiliki A-modul kiri M diperoleh

(i). $(M,+)$ grup Abel,

(ii). $(A\times A,+,\cdot)$ ring dengan elemen satuan $(1,1)$

(iii). Aksi kiri ${}_M\alpha$ tertutup, sebab untuk setiap $(a_1,a_2)\in A\times A$ dan $m\in M$,

$${}_M\alpha((a_1,a_2),m)=(a_1,a_2)m = a_1m+a_2m \in M.$$

(iv). Aksi kiri ${}_M\alpha$ *well defined.*

Ambil sebarang $(a_1,a_2)=(b_1,b_2)\in A\times A$ dan $m_1 = m_2 \in M$. Akan ditunjukkan ${}_M\alpha((a_1,a_2),m_1) = {}_M\alpha((b_1,b_2),m_2) \Leftrightarrow (a_1,a_2)m_1 = (b_1,b_2)m_2$ $\Leftrightarrow a_1m_1+a_2m_1 = b_1m_2+b_2m_2$. Karena $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ dan $m_1 = m_2$, aksi kiri pada A-modul M menyebabkan $a_1m_1 = b_1m_2$ dan $a_2m_1 = b_2m_2$. Dari sifat biner operasi $+$ di M, diperoleh $a_1m_1+a_2m_1 = b_1m_2+b_2m_2$. Terbukti ${}_M\alpha$ *well defined.*

(v). Untuk setiap $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in A\times A$ dan $m_1,m_2\in M$ diperoleh

1. $$\begin{aligned}((a_1,a_2)+(b_1,b_2))m_1 &= (a_1+b_1,a_2+b_2)m_1 = (a_1+b_1)m_1+(a_2+b_2)m_1\\ &= a_1m_1+b_1m_1+a_2m_1+b_2m_1\\ &= a_1m_1+a_2m_1+b_1m_1+b_2m_1\\ &= (a_1,a_2)m_1+(b_1,b_2)m_1\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}(a_1,a_2)(m_1+m_2) &= a_1(m_1+m_2)+a_2(m_1+m_2) = a_1m_1+a_1m_2+a_2m_1+a_2m_2\\ &= a_1m_1+a_2m_1+a_1m_2+a_2m_2 = (a_1,a_2)m_1+(a_1,a_2)m_2\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}((a_1,a_2).(b_1,b_2))m_1 &= (a_1b_1,a_2b_2)m_1 = (a_1b_1)m_1+(a_2b_2)m_1\\ &= a_1(b_1m_1)+a_2(b_2m_1) = (a_1,a_2)(b_1m_1+b_2m_1)\\ &= (a_1,a_2)((b_1,b_2)m_1)\end{aligned}$$

4. jika $m_1 \neq 0$, maka $(1,1)m_1 = 1m_1 + 1m_1 = m_1 + m_1 \neq m_1$.

Dari (i) – (v) meskipun $A \times A$ adalah ring dengan elemen satuan, tetapi M merupakan $A \times A$-modul kiri non-unital. □

Secara umum berdasarkan Contoh 3.3 jika diberikan A-modul kiri unital M, maka M dapat dipandang sebagai A^n-modul kiri non-unital, $n \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut jika M adalah (A,A)-bimodul unital, maka M adalah (A^n, A^n)-bimodul non-unital.

Pada pembahasan berikutnya, modul non-unital yang dibahas adalah **modul non-unital atas ring dengan elemen satuan**. Sehingga pada tulisan ini jika tidak diberikan keterangan lebih lanjut A diasumsikan sebagai ring dengan elemen satuan. Berikutnya akan diberikan contoh-contoh modul non-unital yang muncul akibat aksi ${}_M\alpha$ seperti pada Contoh 3.3 diatas.

Contoh 3.4 Diberikan ring $\mathbb{R}^2$ dengan elemen satuan. Himpunan $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ yaitu himpunan matriks berukuran 2×2 atas $\mathbb{R}$ merupakan modul kiri non-unital atas $\mathbb{R}^2$.

Contoh 3.5 Pada Contoh 3.3, jika diambil ring A adalah lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ dan M adalah ruang vektor $\overline{\mathbb{R}}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left(\mathbb{R}^2\right)^T$, maka $\overline{\mathbb{R}}^2$ adalah $\mathbb{R}$-modul kiri unital. Jadi terhadap aksi kiri seperti pada Contoh 3.3, $\overline{\mathbb{R}}^2$ adalah $\mathbb{R}^2$-modul kiri non-unital. Secara umum, $\overline{\mathbb{R}}^n$ merupakan $\mathbb{R}^m$-modul non-unital $n, m \in \mathbb{N}$.

Contoh 3.6 Pada Contoh 3.3, jika diambil ring A adalah ring matriks berukuran 2×2 yaitu $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dan M adalah ruang vektor $\overline{\mathbb{R}}^2$, maka $\overline{\mathbb{R}}^2$ adalah $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$-modul kiri unital. Akibatnya $\overline{\mathbb{R}}^2$ adalah $\left(M_{2\times 2}(\mathbb{R})\right)^2$-modul kiri non-unital sebab

$$\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{R}}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Untuk $n, m \in \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{R}}^n$ adalah $M_{n\times n}(\mathbb{R})$-modul kiri unital. Lebih lanjut diperoleh $\overline{\mathbb{R}}^n$ merupakan $\left(M_{n\times n}(\mathbb{R})\right)^m$-modul kiri non-unital.

Contoh 3.7 Untuk setiap ruang vektor V atas lapangan F, dapat dibentuk himpunan $Lin_F(V,V) = \{T : V \to V \mid \text{T transformasi linear}\}$. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $Lin_F(V,V)$ merupakan ruang vektor atas lapangan F, sebab $(\forall T, T' \in Lin_F(V,V))(\forall \alpha \in F)$ $T + T' \in Lin_F(V,V)$ dan $\alpha T \in Lin_F(V,V)$ dengan definisi $(\forall v \in V) T + T'(v) = T(v) + T'(v)$ dan $\alpha T(v) = \alpha(T(v))$. Karena ruang vektor $Lin_F(V,V)$ dapat dipandang sebagai F-modul, maka terhadap aksi seperti pada Contoh 3.3 $Lin_F(V,V)$ merupakan F^n-modul kiri non-unital, $n \in \mathbb{N}$.

IV. HASIL KALI TENSOR DARI MODUL NON-UNITAL

. Pada bagian sebelumnya diberikan penjelasan tentang hasil kali tensor untuk modul unital. Selanjutnya diberikan penjelasan bagaimana sifat unital sebuah modul berpengaruh terhadap hasil kali tensor yang terbentuk. Sifat-sifat di bawah ini ditulis berdasarkan [9].

Lemma 4.1 *Untuk setiap A-modul kanan non-unital M terdapat epimorfisma* $-\otimes 1: M \to M \otimes_A A,\ m \mapsto m \otimes 1.$

Bukti :

Ambil sebarang $m, n \in M$

a. $-\otimes 1(m+n) = (m+n)\otimes 1 = (m\otimes 1)+(n\otimes 1)$
$= -\otimes 1(m) + -\otimes 1(n)$

b. $-\otimes 1(rm) = rm\otimes 1 = r(m\otimes 1) = r(-\otimes 1)(m)$

c. Jika $m\otimes a \in M\otimes_A A,$ untuk $m\in M$ tersebut terdapat $ma \in M$ sedemikian hingga $-\otimes 1(ma) = ma\otimes 1 = m\otimes a1 = m\otimes a.$

Dari (a) - (c) terbukti $-\otimes 1: M \to M\otimes_A A$ merupakan epimorfisma.

Epimorfisma $-\otimes 1$ akan menjadi isomorfisma jika dan hanya jika M A-modul kanan unital. Lemma 4.1 juga berlaku untuk A-modul kiri non-unital. Untuk setiap A-modul kiri unital K terdapat epimorfisma $1\otimes -: K \to A\otimes_A K.$ Dari Teorema 2.8 telah diketahui bahwa jika M modul unital, maka $M \cong M\otimes A.$ Berikut diberikan teorema tentang isomorfima pada kategori modul non unital. Penulis perlu mengingatkan kembali bahwa definisi homomorfisma pada modul non unital sama dengan modul unital.

Teorema 4.2 *Diberikan* $M \in \tilde{\mathrm{M}}_A.$ *Pemetaan* $M\otimes_A A \to MA$ *dengan definisi* $m\otimes a \mapsto ma$ *dan* $MA \to Hom_A(A, M), ma \mapsto f_{ma}$ *dengan definisi* $(\forall r\in A)\ f_{ma}(r) = mar$ *merupakan isomorfisma modul.*

Bukti:

Bukti $M\otimes_A A \cong MA$ analog dengan Teorema 2.8. Perbedaannya dikarenakan struktur modul non-unitalnya, yaitu untuk $m\in M, m\otimes 1_A \neq 1.$ Diberikan pemetaan $\alpha = MA \to Hom_A(A,M), ma \mapsto f_{ma}$ dimana $(\forall r\in A)\ f_{ma}(r) = mar \in MA.$

(i). Pemetaan α *well defined*, sebab untuk setiap $ma, nb \in MA$ dengan $ma = nb$ berakibat $(\forall r\in A) mar = nbr \Leftrightarrow f_{ma}(r) = f_{nb}(r) \Leftrightarrow f_{ma} = f_{nb}.$

(ii). Pemetaan α merupakan homorfisma modul, sebab untuk setiap $ma.nb \in MA$ dan $r\in A$ diperoleh $\alpha(ma+nb) = f_{ma+nb} = f_{ma} + f_{nb} = \alpha(ma) + \alpha(nb)$ dan $\alpha(mar) = f_{mar} = f_{ma}r = \alpha(ma)r.$

(iii) Ditunjukkan α injektif. Ambil sebarang $x\in Ker(\alpha),\ \alpha(x) = f_x = o.$ Akibatnya $(\forall r\in A)\ f_x(r) = xr = 0,$ karena berlaku untuk sebarang $r\in A,$ haruslah $x = 0$ atau $Ker(\alpha) = 0.$

(iv). Pemetaan α surjektif sebab untuk setiap $g\in Hom_A(A,M),$ terdapat $g(1_A)\in M \subseteq MA$ sedemikian hingga $(\forall r\in A)\alpha(g(1_A))(r) = f_{g(1_A)}(r) = g(1_A)(r)$ $= g(1_A r) = g(r).$ Jadi terbukti $(\forall g\in Hom_A(A,M))(\exists g(1_A)\in MA)\alpha(g(1_A)) = g.$

Teorema 4.2 dan Teorema 2.8 memberikan gambaran bagaimana struktur modul non unital mempengaruhi sifat hasil kali tensor. Jika di Teorema 2.8 diperoleh $M \otimes_A A \cong M$ dan $Hom_A(A, M) \cong M$, maka di Teorema 4.2 diperoleh hal yang berbeda yaitu untuk A-modul kanan non-unital M, $M \otimes_A A \cong MA \cong M1$ dan $Hom_A(A, M) \cong MA.$ Analog untuk (A, A) bimodul non-unital M terdapat epimorfisma $1 \otimes - \otimes 1 : M \to A \otimes_A M \otimes_A A \cong AMA,\ m \mapsto 1 \otimes m \otimes 1\ (= 1m1).$

V. SIMPULAN DAN SARAN

Definisi dan aksioma Modul non-unital merupakan perumuman dari modul unital jika ring yang diberikan adalah ring tanpa elemen satuan. [5] membagi definisi modul menjadi dua bagian, dimana ring pada modul unital adalah ring dengan elemen satuan 1, sedangakan pada modul non-unital ringnya tidak harus dengan elemen satuan. Pada kenyataanya, Grup Abel yang dioperasikan dengan ring yang dilengkapi elemen satuan tidak selalu menjadi modul unital. Artinya keunitalanya benar-benar bergantung pada aksiomanya.

Hasil kali tensor terbentuk dari modul-modul kiri dan kanan. Sifat dari hasil kali tensor antara modul unital dan modul non-unital tidak sama. Pada A-modul non-unital kanan M diperoleh bahwa $Hom_A(A, M) \cong MA$ dan $M \otimes_A A \cong MA.$ Sedangkan untuk A-modul unital kanan M diperoleh $Hom_A(A, M) \cong M$ dan $M \otimes_A A \cong M.$ Jadi isomorfisma hasil kali tensor dipengaruhi oleh aksioma unital modul.

Kajian tentang modul non-unital dapat dieksplor lebih lanjut. Dari modul unital dan hasil kali tensor, [3] telah menjelaskan sebuah struktur yang disebut koring dan komodul. Selanjutnya dalam [6] dan [9], struktur dasar pada koring diganti dengan modul non-unital dan diperoleh sebuah struktur baru yang disebut koring lemah dan komodul lemah. Penulis berharap, pembaca dapat melakukan penelitian lebih lanjut yang masih berkaitan dengn modul non-unital dan hasil kali tensor.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adkins,W.,A., and Weintroub, SH., Algebra : *An Approach Module Theory*, Springer- Verlag, New York, 1992.

[2] Anderson, F.W. and Fuller, K.R., *Graduate Texts in Mathematics*, Mathematical Method of classical Mechanics, 2nd Ed., Springer – Verlag, New York, 1992.

[3] Brzeziński, T., and Wisbauer, R., *Coring and comodules*, Germany, 2003.

[4] Fraleigh, J., *A first Course in Abstract Algebra*, 6th Ed., Singapore : Addison - Wesley Publishing Company, 1994.

[5] Hungerford, T.W., *Algebra, Graduate text in Mathematics,* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[6] Puspita, N. P., *Koring Lemah*, tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, 2009.

[7] Schubert, H., *Categories*, Springer-Verlag,Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[8] Wisbauer, R., *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, 1991.

[9] Wisbauer, R., Weak Coring, in *Jurnal of Algebra 245*, pp. 123 – 160, 2001.