Subsemigrup $S(B)$ Fuzzy

Oleh
[1,2]**Karyati , [3]Sri Wahyuni, [4]Budi Surodjo, [5]Setiadji**
[1] Mahasiswa S3, Jurusan Matematika , FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara, Yogyakarta
[2]Jurusan Penddikan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
[3,4,5] Jurusan Matematika , FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara, Yogyakarta

e-mail: [1,2] yatiuny@yahoo.com, [3]swahyuni@ugm.ac.id, ,[4] surodjo_b@ugm.ac.id

Abstrak

Dalam tulisan ini akan diawali dengan memberikan konsep tentang definisi suatu subsemigrup $S(B)$ Fuzzy.
Selanjutnya dibahas tentang sifat-sifat Subsemigrup $S(B)$ Fuzzy. Dalam menggali sifat-sifat ini akan dimanfaatkan sifat dari suatu $\alpha - cut$ -nya.

Kata kunci: *semigrup $S(B)$, Semigrup regular, Subsemigrup $S(B)$ Fuzzy, $\alpha - cut$*

1. Pendahuluan

Misalkan X dan Y adalah ruang vector atas lapangan K, dengan karakteristik K adalah nol. Suatu fungsi $B: X \times Y \to K$ dikatakan bentuk bilinear jika B linear terhadap masing-masing variabelnya. Pada dasarnya, setiap bentuk bilinear menentukan dua pemetaan linear, yaitu $B_*: X \to Y^*$, yang dididefinisikan dengan $B_*(x): B(x, -)$ dan $B^*: Y \to X^*$, didefinisikan oleh $B^*(y) = B(-, y)$. Dalam hal ini X^* dan Y^* masing-masing menotasikan ruang dual untuk X dan Y. Selanjutnya dinotasikan $\mathcal{L}(X)$ dan $\mathcal{L}(Y)$ masing-masing adalah himpunan semua operator linear X dan Y. Jika $f \in \mathcal{L}(X)$, maka diperoleh subruang vector X :

$N(f) = \{u \in X \mid f(u) = 0\}$, $R(f) = \{v \in X \mid f(x) = v, for\ \ some\ \ x \in X\}$

Elemen $f \in \mathcal{L}(X)$ dikatakan pasangan adjoin dari $g \in \mathcal{L}(Y)$ relatif terhadap bentuk bilinear B dan sebaliknya jika $B(x, g(y)) = B(f(x), y)$ untuk semua $x \in X$ dan $y \in Y$. Selanjutnya dinotasikan himpunan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}'(X) = \{f \in \mathcal{L}(X) \mid N(B_*) \subseteq N(f), \qquad R(f) \cap N(B_*) = \{0\}\}$$
$$\mathcal{L}'(Y) = \{g \in \mathcal{L}(Y) \mid N(B^*) \subseteq N(g), \qquad R(g) \cap N(B^*) = \{0\}\}$$

Selanjutnya juga dinotasikan himpunan yang dibentuk berdasarkan himpunan tersebut sebagai berikut:

$$S(B) = \{(f, g) \in \mathcal{L}'(X) \times \mathcal{L}[\mathcal{L}'(Y)]^{op} \mid (f, g)\ \ pasangan\ adjoint\}.$$

Himpunan tersebut membentuk semigrup terhadap operasi biner berikut: $(f, g)(f', g') = (ff', g'g)$. Semigrup yang isomofik dengan $S(B)$ disebut semigrup bentuk bilinear.

Misalkan S adalah semigrup dan $a \in S$. Elemen a disebut elemen eguler jika terdapat $a' \in S$ sedemikian sehingga $a = aa'a$. Semigrup S disebut semigrup regular jika setiap elemen S merupakan elemen regular. Elemen a disebut regular lengkap jika terdapat elemen $a' \in S$ sedemikian sehingga $a = aa'a$ dan $aa' = a'a$. Semigrup S disebut semigrup regular lengkap jika setiap elemen S adalah regular lengkap.

2. Hasil dan Pembahasan

Misalkan $S(B)$, $S(B')$ adalah semigrup bentuk bilinear, untuk $x \in S(B)$ didefinisikan $R_x = \{x' \in S(B) | x = xx'x\}$ dan $C_x = \{y \in S(B) | yx = xy\}$

Proposition 2.1. *Kondisi berikut adalah ekuivalen untuk semua* $x \in S(B)$:

i. x *elemen reguler*

ii. $R_x \neq \emptyset$

iii. $x \in xS(B)x$

Bukti:

Jika dimiliki elemen regular x , maka terdapat $' \in S(B)$, sedemikian sehingga $x = xx'x$. Berdasarkan definisi R_x , maka $x' \in R_x$. Hal ini berarti bahwa $R_x \neq \emptyset$.

Jika $R_x \neq \emptyset$, maka terdapat elemen $x' \in S(B)$ sedemikian sehingga $x = xx'x$. Berdasar pada definisi diperoleh: $xS(B)x = \{x | x = xx'x \quad untuk\ suatu \quad x' \in S(B)\}$, sehingga $x \in xS(B)x$

Jika $x \in xS(B)x$, maka terdapat $x' \in S(B)$ sedemikian sehingga $x = xx'x$, atau dengan kata lain x adalah elemen reguler.

Proposition.2.2. *Kondisi berikut ekuivalen untuk semua* $x \in S(B)$:

i. x adalah elemen reguler lengkap

ii. $R_x \cap C_x \neq \emptyset$

iii. $x \in x^2 S(B) x^2$

iv. $x \in x^2 S(B) \cap S(B) x^2$

Proposition.2.3 *Misalkan* α *adalah homomorfisma dari* $S(B)$ *ke* $S(B')$, *sehingga berlaku:*

1. $\propto (R_x) \subseteq R_{\propto(x)}$, $\forall x \in S(B)$
2. $\propto^{-1} (R_y) \supseteq R_{\propto^{-1}(y)}$, $\forall y \in S(B')$

Bukti:

1. Misalkan $y \in \propto (R_x)$, untuk sebarang elemen $x \in S(B)$. Sehingga terdapat $x' \in R_x$ sedemikian sehingga $\propto (x') = y$ dan $x = xx'x$. Diketahui bahwa $\propto$ adalah suatu homomorfisma sehingga diperoleh:
$\propto (x) = \propto (xx'x) = \propto (x) \propto (x') \propto (x) = \propto (x) y \propto (x)$.

   Berdasarkan definisis maka diperoleh $y \in R_{\propto(x)}$
2. Berdasarkan definisi: $R_{\propto^{-1}(y)} = \{x' \in S(B) | \propto^{-1} (y) = \propto^{-1} (y).x'.\propto^{-1} (y)\}$. Ambil sebarang elemen $x' \in R_{\propto^{-1}(y)}$, sehingga diperoleh:

$\propto^{-1}(y) = \propto^{-1}(y).x'.\propto^{-1}(y)$
$\propto^{-1}(R_y) = \{x \in S(B) | \propto(x) = y', y = yy'y,$ untuk suatu $y \in S(B')\}$

Proposition.2.4. Misalkan $\propto$ adalah homomorfisma dari semigrup $S(B)$ ke $S(B')$T, sehingga berlaku :

1. $\propto(f)$ adalah subsemigrup fuzzy $S(B')$ jika f subsemigup fuzzy $S(B)$
2. $\propto^{-1}(g)$ adalah subsemigrup fuzzy $S(B)$ jika g subsemigrup fuzzy $S(B')$

Definition.2.1 *Jika f subsemigrup fuzzy dari $S(B)$ dan untuk setiap $x \in S(B)$, terdapat $x' \in R_x$ sedemikian sehingga berlaku:*
$f(x') \geq f(x)$
Yang berarti $f(x) \neq 0$, maka f disebut subsemigrup bentuk bilinear fuzzy $S(B)$

Propositon.2.5. *Suatu pemetaan f merupakan subsemigrup bentuk bilinear fuzzy dari $S(B)$ jika dan hanya jika $\forall t \in (0,1]$, f_t is a regular subsemigroup of* $S(B)$.

Proposition.2.6. Jika A iadalah himpunan tak kosong dari $S(B)$, maka A merupakan subsemigrup reguler dari $S(B)$ Jika dan hanya jika C_A, yaitu fungsi karakteristik dari A , merupakan subsemigrup reguler dari $S(B)$.
Bukti:
Jika A adalah subsemigroup regular $S(B)$, maka $C_A(xy) = C_A(x) \wedge C_A(y)$ dan jika $x, y \in A$ berakibat $xy \in A$. Untuk setiap $x \in A$, jika $C_A(x) \neq 0$ yaitu $C_A(x) = 1$ atau $x \in A$. Lebih lanjut, karena A reguler maka untuk setiap $x \in A$ terdapat $x' \subset R_x$ sedemikian sehingga $x' \subset A$ atau $C_A(x') = 1$. Akibatnya, $A(x') \geq A(x)$. Sehingga C_A adalah subsemigrup regular fuzzy.
Sebaliknya, jika C_A adalah subsemigrup regular fuzzy dari $S(B)$, maka untuk setiap $x, y \in A$, $C_A(x) = C_A(y) = 1$. Dari sini diperoleh $C_A(xy) = C_A(x) \wedge C_A(y) = 1$, sehingga $C_A(xy) = 1$ dan akibatnya $xy \in A$. Selanjutnya $C_A(x') \geq C_A(x) = 1 \Rightarrow C_A(x') = 1 \Rightarrow x' \in A$. Sehingga A subsemigrup regular $S(B)$.

Proposition.2.7. Misalkan $\propto$ adalah homomorfisma semigrup yang surjektif dari $S(B)$ onto $S(B')$, sehingga pernyataan berikut berlaku:

1. Jika f adalah subsemigrup bentuk bilinear fuzzy $S(B)$, maka $\propto(f)$ adalah subsemigrup bentuk bilinear $S(B')$
2. Jika g adalah subsemigrup bentuk bilinear fuzzy $S(B)$, maka $\propto^{-1}(g)$ adalah subsemigrup bentuk bilinear fuzzy $S(B')$

Bukti:

1. Untuk setiap $t \in (0,1]$, $(\alpha(f))_t$ subsemigrup bentuk bilinear dari $S(B')$ yang berarti $(\alpha(f))_t \neq \emptyset$. Dalam kenyataannya, jika terdapat $t_0 \in (0,1]$ sedemikian $(\alpha(f))_{t_0}$ bukan himpunan kosong dan bukan regular, maka terdapat $x \in (\alpha(f))_{t_0}$ sedemikian

sehingga untuk setiap $x' \in R_x$, $x' \notin (\alpha(f))_{t_0}$, yaitu $(\alpha(f))(x) \geq t_0 \neq 0$ dan untuk setiap $x' \in R_x$, $(\alpha(f))(x) < t_0$, untuk setiap $y \in \alpha^{-1}(x)$, $f(y) > t_0$ dan untuk setiap $z \in \alpha^{-1}(x')$, $f(z) < t_0$. Misal $0 < t < t_0$, untuk setiap $y \in \alpha^{-1}(x)$, $f(y) > t$ dan untuk setiap $z \in \alpha^{-1}(x')$, $f(z) < t$. Selanjutnya terdapat $y_0 \in S(B)$ dengan $\alpha(y_0) = x$ dan $f(y_0) > t$ atau $y_0 \in f_t$, $f_t \neq \emptyset$. Untuk suatu z, x' dengan $\alpha(z) = x'$, diperoleh $f(z) < t$ atau $z \notin f_t$. Jelas bahwa untuk setiap $y'_0 \in R_{y_0}$ dan sehingga untuk setiap $y' \in R_{y_0}$, $y'_0 \notin f_t$ yaitu f_t bukan regular. Hal ini kontradiksi dari yang diketahui bahwa f adalah subsemigrup bentuk bilinear fuzzy dari semigrup $S(B)$.

2. Jika g adalah subsemigrup bentuk bilinear fuzzy dari semigrup $S(B')$, maka untuk setiap $y \in S(B')$, $g(y) \neq 0$ berakibat terdapat $y' \in R_y$ sedemikian sehingga $g(y') \geq g(y)$. Karena α surjektif, maka untuk setiap $y \in T$ terdapat $x \in S(B)$ sedemikian sehingga $\alpha(x) = y$, dan untuk setiap $x \in S(B)$, $g(\alpha(x)) \neq 0$ berakibat terdapat $(\alpha(x))' \in R_{\alpha(x)}$ dengan $g\left((\alpha(x))'\right) \geq g(\alpha(x))$. Dari sifat sebelumnya, maka untuk setiap $\alpha(x)' \in R_{\alpha(x)}$, terdapat $x \in R_x$ sedemikian sehingga $(\alpha(x))' = \alpha(x')$. Hence:
$g\left((\alpha(x))'\right) \geq g(\alpha(x))$
$g(\alpha(x')) \geq g(\alpha(x))$
$$(\alpha^{-1}(g))(x') \geq (\alpha^{-1}(g))(x)$$
Dengan demikian $\alpha^{-1}(g)$ merupakan subsemigrup bentuk bilinear fuzzy dari $S(B)$

Proposisi.2.8. *Jika* f *adalah subsemigrup regular fuzzy dari* $S(B)$, *maka* $f \circ f = f$

Bukti:

Selalu dipenuhi $f \circ f \subseteq f$. Selanjutnya untuk setiap $x \in S(B)$, jika $f(x) = 0$ maka $(f \circ f)(x) \leq f(x)$, yang berakibat $(f \circ f)(x) = f(x)$. Jika $f(x) \neq 0$, maka terdapat $x' \in R_x$ dengan $f(x') \geq f(x)$, sebab f reguler fuzzy. Dengan demikian belaku :

$$\bigvee_{yz=x} (f(y) \wedge f(z)) \geq \left(f(xx') \wedge f(x)\right) \geq \left(f(x') \wedge f(x)\right) = f(x)$$

yang berarti bahwa $f \subseteq f \circ f$. Akibatnay terbukti bahwa $f \circ f = f$.

Bentuk suatu himpunan $S(B)^1 = S(B) \cup 1$ dengan $x.1 = 1.x = x$, untuk setiap $x \in S(B)$. Sehingga $S(B)$ adalah semigrup dengan elemen identitas. Untuk setiap subhimpunan fuzzy f dari semigrup $S(B)$ didefinisikan suatu subhimpunan fuzzy f' dari suatu semigrup $S(B)$ sebagai berikut:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x = 1 \\ f(x), & \text{jika } x \in S(B) \end{cases}$$

Jelas bahwa untuk setiap $t \in [0,1]$, $1 \in f'_t$.

Proposisi. 2.9. *Pemetaan* f *merupakan subsemigrupbentuk bilinear fuzzy dari* $S(B)$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $x \in S(B)$ *jika* $f(x) \neq 0$ *maka terdapat*

$t \in (0,1]$ *dan terdapat elemen idempotent* $s \in f_t$ *sedemikian sehingga* $xf_t' = sf_t$ *dengan* $t = f(x)$.

Bukti:

Jika f subsemigrup bentuk bilinear fuzzy dari $S(B)$, maka untuk setiap $t \in (0,1]$, f_t adalah subsemigrup bentuk bilinear dari $S(B)$ yang membuktikan bahwa $f_t \neq \emptyset$. Selanjutnya, untuk setiap $x \in S(B)$ jika $f(x_0) = t_0 \neq 0$ maka $x_0 \in f_{t_0}$ dan f_{t_0} adalah himpunan tak kosong dan subsemigrup bentuk bilinear $S(B)$. Sehingga terdapat $e \in f_t$ sedemikian sehingga $xf_t' = ef_t$.

Sebaliknya, misal untuk setiap $x \in S(B)$ terdapat suatu elemen idempoten $s \in f'_t$ sedemikian sehingga $xf_t' = ef_t$ ketika $f(x) = t \neq 0$. Ditunjukkan bahwa f adalah subsemigrup bentuk bilinear fuzzy dari $S(B)$. Dalam hal ini cukup dibuktikan bahwa untuk setiap $t \in (0,1]$, f_t adalah subsemigrup bentuk bilinear dari $S(B)$ yang membuktikan bahwa $f_t \neq \emptyset$. Dalam kenyataannya jika $f_t \neq \emptyset$ maka untuk setiap $x \in f_t$, $f(x) \geq t$. Dibentuk $f(x) = t$ dan $t_0 \geq t$. Dengan asumsi terdapat elemen idempotent $e \in t_0$ sedemikian sehingga $xf_{t_0}' = ef_{t_0}$. Sehingga terdapat $y \in f_{t_0}$ dengan $x = ey$ dan terdapat $z \in f_{t_0}'$ dengan $xz = e$. Sekarang diperoleh $ex = e^2y = ey = x$, yaitu $xzx = x$, $z \in R_x$ dan $\mu(z) \geq \lambda_0 > \lambda$ yaitu $z \in f_t$. Sebagai konsekuensinya untuk setiap $x \in f_t$ terdapat $z \in R_x$ dengan $z \in f_t$, yang berarti f_t adalah subsemigrup bentuk bilinear dari $S(B)$.

3. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, dapat ditelusuri beberapa sifat terkait dengan subsemigrup bentuk bilinear fuzzy dengan memanfaatkan sifat dari alpha-cut atau sering disebut juga dengan $t-$ levelnya.

Daftar Pustaka

Howie, J.M, 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, Ltd, London

Karyati, et.al. 2008. Ideal Fuzzy Semigrup. *Seminar Nasional MIPA dan Pendidikan MIPA di FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, tanggal 30 Mei 2008*. Yogyakarta

Karyati, et.al. 2008. The Fuzzy Version Of The Fundamental Theorem Of Semigroup Homomorphism. *The 3rd International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-3)Institut Pertanian Bogor, Indonesia, 5-6 August 2008*. Bogor

Karyati, et.al. 2009. Beberapa Sifat Ideal Fuzzy Semigrup yang Dibangun oleh Subhimpunan Fuzzy. *Seminar Nasional Matematika, FMIPA, UNEJ*. Jember

Mordeson, J.N & Malik, D.S. 1998. *Fuzzy Commutative Algebra*. World Scientifics Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore