

Ruang Linear Metrik: Sifat – Sifat Dasar Dan Struktur Ruang Dalam Ruang Linear Metrik

Oleh :

Iswanti¹, Soeparna Darmawijaya²

Iswanti, Jurusan Teknik Elektro, Politeknik Negeri Semarang, Semarang,
Jawa Tengah

iswanti1323@gmail.com

Soeparna Darmawijaya, Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada,
Daerah Istimewa Yogyakarta
soep@go.co.id

Abstrak

Konsep dasar pada suatu ruang linear metrik dibangun berdasarkan kombinasi dari konsep – konsep pada suatu ruang linear dan suatu ruang metrik. Sistem persekitaran dari suatu vektor dapat ditentukan melalui sistem persekitaran dari vektor nol, yaitu dengan menggunakan translasi.

Dalam penulisan ini diperoleh beberapa sifat dari ruang metrik masih berlaku dalam ruang linear metrik. Beberapa struktur ruang dalam ruang linear metrik diperoleh selanjutnya. Antara lain ruang bagian dari ruang linear metrik, ruang kuosen dari ruang linear metrik dan ruang produk dari ruang – ruang linear metrik.

Kata Kunci: ruang linear, ruang metrik, ruang bagian, ruang kuosen, ruang produk.

I. Pendahuluan

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan dan manfaat dalam penulisan ini.

1.1. Latar Belakang dan Permasalahan

Banyak penelitian dalam matematika khususnya analisis yang dilatarbelakangi pemahaman konsep topologi dan aljabar linear. Definisi tentang ruang linear metrik telah diberikan oleh Frechet sejak tahun 1926. Hal tersebut diperoleh dari buku karangan Rolewicz (1972). Bahkan fakta-fakta dasar dalam ruang linear metrik juga telah dibuktikan oleh Banach dan kolega-koleganya sejak sebelum tahun 1940. Beberapa paper telah dipublikasikan sehubungan dengan ruang linear metrik, namun belum ada yang menyajikan pembahasan tentang Aksioma Separasi, ruang produk, serta fungsi linear kontinu pada ruang linear metrik.

Berdasarkan fakta – fakta tersebut penulis ingin mengungkap beberapa pokok permasalahan dalam ruang linear metrik yaitu:

- (a) Aksioma Separasi seperti apa yang berlaku pada ruang linear metrik.
- (b) Bagaimana mendefinisikan ruang bagian dari suatu ruang linear metrik serta sifat – sifat dasar apa sajakah yang melekat pada ruang bagian dari ruang linear metrik.
- (c) Bagaimana mendefinisikan ruang kuosen pada suatu ruang linear metrik serta sifat – sifat dasar apa sajakah yang melekat pada ruang kuosen dari ruang linear metrik.
- (d) Bagaimana mendefinisikan ruang produk dari ruang - ruang linear metrik serta sifat – sifat dasar apa sajakah yang melekat pada ruang produk tersebut.

1.2. Tujuan dan Manfaat

Tujuan yang ingin dicapai dari penulisan ini adalah menunjukkan bahwa Aksioma Separasi pada ruang metrik masih berlaku pada ruang linear metrik. Selanjutnya mampu mendefinisikan ruang bagian dalam ruang linear metrik. Kemudian mampu mendefinisikan ruang kuosen dalam ruang linear metrik. Lebih lanjut, mampu mendefinisikan ruang produk dari ruang - ruang linear metrik.

Manfaat yang diperoleh dari hasil penulisan ini adalah memberikan perluasan dan pendalaman wawasan mengenai ruang linear metrik. Khususnya tentang pengetahuan yang meliputi sifat – sifat ruang metrik apa yang masih berlaku pada ruang linear metrik serta ruang – ruang yang terdefinisikan di dalam ruang linear metrik, yaitu ruang bagian, ruang kuosen dan ruang produk.

II. Landasan Teori

Dalam pembahasan bab ini akan diberikan beberapa pengertian dan sifat-sifat dari ruang linear dan ruang metrik untuk digunakan pada pembahasan selanjutnya.

2.1. Ruang Vektor

Diketahui $(V, +)$ group komutatif dan $(F, +, \cdot)$ lapangan dengan elemen identitas 1. V disebut **ruang vektor** (vector space) atas lapangan F jika ada operasi linear $*$ antara keduanya sehingga untuk setiap $x \in V$ dan $\alpha \in F$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x \in V$ yang memenuhi sifat-sifat: (i) $x * (y + z) = x * y + x * z$; (ii) $(\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$; (iii) $(\alpha \cdot \beta) * x = \alpha * (\beta * x)$; dan (iv) $1 * x = x$ untuk setiap $x, y \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$.

Diketahui V ruang vektor atas lapangan F dan $W \subset V$. Jika himpunan W terhadap operasi-operasi yang sama dengan operasi-operasi di dalam V juga merupakan ruang vektor atas lapangan F , maka W disebut **ruang vektor bagian** (vector subspace) dari V .

Diberikan W ruang bagian dari ruang vektor V . Karena $(W, +)$ membentuk group komutatif pada $(V, +)$ dapat dibicarakan mengenai koset – koset dari W pada V . Namakan $V/W =$ himpunan semua koset – koset $\{W + x\}$ untuk setiap $x \in V$. Selanjutnya V/W merupakan ruang vektor atas lapangan F terhadap operasi – operasi yang didefinisikan di bawah ini: Untuk setiap $x, y \in V$ dan skalar $\alpha \in F$ berlaku: (i) $(W + x) + (W + y) = W + (x + y)$; (ii) $\alpha(W + x) = W + (\alpha x)$.

2.2. Ruang Metrik

Diberikan sebarang himpunan tak kosong X (i) Fungsi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat: (M1) $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$; (M2) $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$; (M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ untuk setiap $x, y, z \in X$, disebut **metrik** (metric) atau **jarak** (distance) pada X . (ii) Himpunan X dilengkapi dengan suatu metrik d , ditulis dengan (X, d) disebut **ruang metrik** (metric space). (iii) Anggota ruang metrik (X, d) disebut **titik** (point) dan untuk setiap $x, y \in X$ bilangan nonnegatif $d(x, y)$ disebut **jarak** (distance) titik x ke titik y .

Diberikan ruang metrik (X, d) . Untuk sebarang titik $a \in X$ dan konstanta $r > 0$, himpunan $N_r(a) = \{x \in X: d(x, a) < r\}$ disebut **persekitaran** (neighborhood) titik a dengan **jari-jari** r . Setiap persekitaran di dalam suatu ruang metrik merupakan himpunan terbuka.

Diberikan ruang metrik (X, d) . Diketahui $\tau \subset 2^X$ yaitu koleksi himpunan bagian dalam X yang merupakan himpunan terbuka yang memenuhi sifat-sifat (i) $\emptyset, X \in \tau$; (ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$; dan (iii) untuk sebarang $\sigma \subset \tau$ berlaku $\bigcup_{A \in \sigma} A \in \tau$ disebut **topologi** (topology) pada himpunan X dan anggota dari suatu topologi adalah himpunan

terbuka. Pasangan (X, τ) disebut **ruang topologis** (*topological space*). Keluarga bagian $\{U_\alpha\} \subset \tau$ dikatakan **basis** (*base*) untuk τ jika untuk setiap himpunan terbuka dalam τ dapat dinyatakan sebagai gabungan dari anggota – anggota $\{U_\alpha\}$.

Diberikan X ruang topologis. Aksioma Separasi berikut ini dikenal juga sebagai Aksioma Separasi Alexandroff dan Hopf:

A_1 : Untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, akan terdapat himpunan terbuka $U \subset X$ sehingga $x \in U$, ada $V \subset X$ sehingga $y \in V$ atau $y \in U$ dan $x \notin V$.

A_2 : Untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, akan terdapat himpunan terbuka $U, V \subset X$ sehingga $x \in U$, $y \in V$ dan $U \cap V = \emptyset$.

A_3 : Untuk setiap $x \in X$ dan himpunan tertutup $F \subset X$ dengan $x \notin F$ akan terdapat himpunan terbuka $U, V \subset X$ sehingga $x \in U$, $F \subset V$ dan $U \cap V = \emptyset$.

A_4 : Untuk setiap dua himpunan tertutup $F_1, F_2 \subset X$ dengan $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ akan terdapat dua himpunan terbuka $U, V \subset X$ sehingga $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ dan $U \cap V = \emptyset$.

Ruang topologis yang memenuhi A_i disebut ruang T_i untuk $i = 1, 2, 3, 4$.

III. Ruang Linear Metrik

Dalam bab ini akan dibahas tentang teori-teori umum dan sifat-sifat dasar ruang linear metrik.

3.1. Pengertian Dasar dan Contoh

Diberikan X ruang linear atas lapangan F dengan $F = \mathbb{C}$ atau $F = \mathbb{R}$. Ruang X disebut **ruang linear metrik** (*metric linear space*) jika ada metrik d sehingga operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar terhadap metrik tersebut kontinu. Dengan kata lain jika ada metrik d pada ruang linear X sehingga memenuhi: (i) Pemetaan $f: X \times X \rightarrow X$ yaitu $f: (x, y) \rightarrow x + y$, kontinu: yaitu untuk setiap $x, y \in X$, bilangan $\varepsilon > 0$ dan persekitaran $W_1 = N_\varepsilon(x + y) \subset X$ terdapat persekitaran $U_1, V_1 \subset X$ sehingga $U_1 + V_1 \subset W_1$; (ii) Pemetaan $g: \mathbb{C} \times X \rightarrow X$ yaitu $g: (\alpha, x) \rightarrow \alpha x$, kontinu: yaitu untuk setiap $x \in X$, skalar α , bilangan $\varepsilon > 0$, dan persekitaran $W_2 = N_\varepsilon(\alpha x) \subset X$ terdapat bilangan $r > 0$ sehingga $|\beta - \alpha| < r$ untuk setiap $\beta \in \mathbb{C}$ dan $U_2 = N_r(\alpha) \subset \mathbb{C}$ sehingga $\beta \cdot V_2 \subset W_2$ maka X disebut **ruang linear metrik** (*metric linear space*).

Teorema 3.1.1 Setiap ruang linear metrik merupakan ruang T_2 atau ruang Hausdorff.

Bukti: Diambil sebarang $x, y \in X$ dengan $x \neq y$. Karena X merupakan ruang linear metrik maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $W = N_\varepsilon(x + y) \subset X$ terdapat himpunan terbuka $U, V \subset X$ sehingga

$$U + V \subset W.$$

Diambil $U = N_{\frac{\varepsilon}{3}}(x) = \{u \in X \mid d(x, u) < \frac{\varepsilon}{3}\}$, $V = N_{\frac{\varepsilon}{3}}(y) = \{v \in X \mid d(y, v) < \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Akan ditunjukkan $U \cap V = \emptyset$. Diandaikan ada $w \in U \cap V$, berarti $w \in U$ dan $w \in V$.

Diperoleh $d(x, w) < \frac{\varepsilon}{3}$ dan $d(y, w) < \frac{\varepsilon}{3}$ sehingga

$$d(x, y) \leq d(x, w) + d(y, w) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dapat disimpulkan bahwa $x = y$. Diperoleh kontradiksi karena $x \neq y$. Sehingga diperoleh $U \cap V = \emptyset$. Selanjutnya X merupakan ruang T_2 atau ruang Hausdorff. ■

Contoh 3.1.2: Diberikan $X = \mathbb{R}$, X merupakan ruang linear metrik terhadap metrik biasa $d(x, y) = |x - y|$. Diberikan $X = \mathbb{R}^n$, X merupakan ruang linear metrik terhadap

$d(x, y) = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$ untuk setiap $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X$. Diberikan

$X = \ell^p = \left\{ \bar{x} = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$ dengan $1 < p < \infty$, X merupakan ruang linear metrik terhadap $d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p}$ dengan $1 < p < \infty$.

Diberikan $X = C[a, b]$ = koleksi fungsi linear kontinu bernilai real (kompleks) yang terdefinisi pada $[a, b]$. X merupakan ruang linear metrik terhadap metrik $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$.

Sifat – sifat ruang linear metrik selanjutnya adalah sifat lengkap dan kompak.

Teorema 3.1.3: Ruang linear metrik X dengan metrik d dikatakan **lengkap** (complete) jika (X, d) merupakan ruang metrik lengkap.

Teorema 3.1.4: Ruang linear metrik X dengan metrik d dikatakan **kompak** (compact) jika (X, d) merupakan ruang metrik kompak.

Berikut diberikan sifat homeorfisma pada ruang linear metrik.

Teorema 3.1.5: Diberikan ruang linear metrik X dengan metrik d . Translasi dan pemetaan dengan skalar: $x \rightarrow \alpha x$ merupakan homeomorfisma.

3.2. Sistem Persekitaran Identitas

Telah diperoleh bahwa translasi merupakan homeomorfisma pada ruang linear metrik maka diperoleh bahwa jika diketahui suatu sistem persekitaran fundamental dari elemen identitas dalam ruang linear metrik akan dapat ditemukan sistem persekitaran fundamental di sebarang titik yang lain dengan translasi. Diberikan ruang linear metrik X . Himpunan bagian $U \subseteq X$ dikatakan **simetrik** (symmetric) jika $U = -U$.

Teorema 3.2.1: Pada setiap ruang linear metrik terdapat $\{U\}$ sistem persekitaran θ fundamental yang simetrik.

Bukti: Namakan $\{U\}$ sistem persekitaran θ fundamental. Karena $\theta = -\theta$, maka untuk setiap $V \in \{U\}$, V merupakan persekitaran θ . Diperoleh:

$$U = V \cap -V.$$

Selain itu

$$-U = V \cap -V = U.$$

Dengan kata lain diperoleh U merupakan persekitaran θ yang simetrik. Akibatnya untuk setiap V memuat U . Karena U merupakan persekitaran θ maka U memuat V . Atau diperoleh $\{U\} = \{V\}$. Jadi terbukti $\{U\}$ merupakan persekitaran θ fundamental yang simetrik. ■

Berdasarkan hasil pembuktian Teorema 3.2.1 diperoleh Akibat – Akibat di bawah ini.

Akibat 3.2.2. Setiap ruang linear metrik X merupakan ruang T_1 .

Akibat 3.2.3. Untuk setiap U persekitaran θ pada ruang linear metrik X terdapat V persekitaran θ sehingga $\bar{V} \subset U$. Dengan kata lain setiap ruang linear metrik merupakan ruang reguler atau ruang T_3 .

Akibat 3.2.4. Setiap ruang linear metrik X merupakan ruang T_4 atau ruang normal.

3.3. Aksioma Separasi pada Ruang Linear Metrik

Pada bagian ini diperoleh bahwa Aksioma Separasi pada ruang metrik masih berlaku pada ruang linear metrik.

Teorema 3.3.1: Pada setiap ruang linear metrik berlaku ekuivalensi antara ruang T_1 , T_2 , T_3 dan T_4 .

IV. Struktur Ruang dalam Ruang Linear Metrik

Penjelasan tentang konsep dasar ruang bagian dari suatu ruang linear metrik, ruang kuosen dari ruang – ruang linear metrik serta ruang produk dari ruang – ruang linear metrik diberikan dalam bagian ini.

4.1. Ruang Bagian

Jika (X, d) ruang metrik dan $A \subset X$ dengan $A \neq \emptyset$ maka (X, d) juga merupakan ruang metrik. Selain itu diperoleh bahwa fungsi restriksi pada domain A dari suatu fungsi kontinu merupakan fungsi kontinu, maka $f_1: A \times A \rightarrow A$ dan $g_1: \mathbb{C} \times A \rightarrow A$ kontinu terhadap metrik d . Dengan kata lain ruang bagian A merupakan ruang linear metrik bagian. Selanjutnya biasa disebut **ruang bagian** (subspace) dari X .

Teorema 4.1.1: Jika H merupakan ruang bagian dari ruang linear metrik X maka $\bar{H}$ juga merupakan ruang bagian.

Bukti: Diketahui H merupakan ruang bagian dari X , maka $\alpha H + \beta H \subset H$ untuk sebarang skalar α, β . Karena pemetaan $(x, y) \rightarrow x + y$ dan $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ kontinu maka $\overline{\alpha H + \beta H} \subset \overline{\alpha H + \beta H} \subset \bar{H}$. Dengan kata lain terbukti $\bar{H}$ ruang bagian. ■

4.2. Ruang Kuosen

Diberikan X ruang linear metrik dan H ruang bagian dari X . Untuk setiap $x \in X$ namakan x/H merupakan koleksi dari semua koset $\{x + H\}$. Diberikan φ pemetaan kanonik dari X ke X/H dengan $\varphi(x) = x + H$ untuk setiap $x \in X$. Menggunakan φ didefinisikan metrik pada X/H sebagai berikut: Untuk setiap $x, y \in X/H$ $d(x, y) = \inf\{d(\varphi(a), \varphi(b)) : \varphi(a) \in x, \varphi(b) \in y\}$ dengan $x = x + H$ dan $y = y + H$, untuk setiap $x, y \in X$. Metrik ini disebut **metrik kuosen** (quotient metric) dan X/H dengan metrik kuosen disebut **ruang kuosen** (quotient space).

Teorema 4.2.1: Diberikan X ruang linear metrik dan H ruang bagian dari X . Ruang kuosen X/H dengan metrik kuosen merupakan ruang linear metrik.

Bukti: Mudah ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in X/H$

$$d(x, y) = \inf\{d(\varphi(a), \varphi(b)) : \varphi(a) \in x, \varphi(b) \in y\}$$

dengan $x = x + H$ dan $y = y + H$, untuk setiap $x, y \in X$ merupakan metrik.

Akan ditunjukkan X/H merupakan ruang linear metrik. Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $W \subset X/H$ dengan $W = N_\varepsilon(x + y)$ dengan $x = x + H$ dan $y = y + H$, untuk setiap $x, y \in X$. Karena φ kontinu maka $\varphi^{-1}(W) \subset X$ terbuka dengan $x + y \in \varphi^{-1}(W)$. Menurut yang diketahui, terdapat himpunan terbuka $U, V \subset X$ dengan $x \in U$ dan $y \in V$ sehingga

$$x + y \in U + V \subset \varphi^{-1}(W).$$

Dengan menggunakan kekontinuan φ diperoleh

$$\varphi(U + V) \subset \varphi(\varphi^{-1}(W)) = W.$$

Karena φ pemetaan terbuka maka $\varphi(U), \varphi(V) \subset X/H$ merupakan himpunan – himpunan terbuka karena $U, V \subset X$ himpunan – himpunan terbuka. Dengan kata lain diperoleh operasi penjumlahan pada ruang kuosen kontinu.

Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, skalar α dan $W \subset X/H$ dengan $W = N_\varepsilon(\alpha x)$ dengan $\tilde{x} = x + H$ untuk setiap $x \in X$. Karena φ kontinu maka $\varphi^{-1}(W) \subset X$ terbuka dengan $\alpha x \in \varphi^{-1}(W)$. Menurut yang diketahui, terdapat bilangan $r > 0$ dan himpunan terbuka $V \subset X$ dengan $|\beta - \alpha| < r$ dan $x \in V$ sehingga

$$\beta x \in \beta V \subset \varphi^{-1}(W).$$

Dengan menggunakan kekontinuan φ diperoleh

$$\beta x \in \varphi(\beta V) \subset \varphi(\varphi^{-1}(W)) = W.$$

Karena φ pemetaan terbuka maka $\varphi(V) \subset X/H$ merupakan himpunan terbuka karena $V \subset X$ himpunan terbuka. Dengan kata lain diperoleh operasi perkalian dengan skalar pada ruang kuosen kontinu. ■

4.3. Ruang Produk

Diberikan $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ keluarga sebarang himpunan. $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ merupakan

himpunan semua fungsi $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ dengan $x(n) = x_n \in X_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. X disebut **produk langsung** (*direct product*) atau **produk Cartesian** (*Cartesian product*) atau **produk** (*product*) dari X_n . Setiap x_n disebut **proyeksi** (*projection*) dari x pada X_n . Pemetaan $p_n: x \rightarrow x_n$ dari X ke X_n disebut **pemetaan proyeksi ke-n** (*n-th projection mapping*).

Teorema 4.3.1: Diberikan $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ keluarga ruang linear metrik terhitung sebanyak tak berhingga (*countably infinite*). Jika pada setiap X_n dipilih metrik d_n dengan

$\delta_n(X_n)$ merupakan diameter X_n terhadap metrik d_n dengan $\delta_n(X_n) \leq \frac{M}{n}$ untuk suatu bilangan $M > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka untuk setiap $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$,
(a)

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}; \quad (b) \quad d(x, y) = \sup\{d_n(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}; \quad (c)$$

$d(x, y) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \varphi(d_n(x_n, y_n))$ ($\varphi > 1$) merupakan metrik – metrik untuk $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ dengan $x_n = p_n(x)$ dan $y_n = p_n(y)$.

Selanjutnya $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ merupakan ruang linear metrik terhadap metrik d .

V. Simpulan dan Saran

Pada bagian ini akan diberikan rangkuman dari hasil penulisan serta saran – saran untuk penulisan selanjutnya.

a. Simpulan

Hasil – hasil yang ingin disampaikan yang diperoleh dari penulisan ini adalah sebagai berikut: Ruang linear X disebut ruang linear metrik jika ada metrik d sehingga

operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar terhadap metrik tersebut kontinu. Pada ruang linear metrik sistem persekitaran θ merupakan sistem persekitaran fundamental. Dari sifat yang dimiliki persekitaran θ diperoleh bahwa Teorema Separasi yang berlaku pada ruang linear metrik adalah ekuivalensi antara T_1 , T_2 , T_3 , dan T_4 .

Jika X ruang linear metrik dengan metrik d maka fungsi penjumlahan dan perkalian dengan skalar kontinu terhadap metrik d sehingga untuk setiap ruang bagian $A \subset X$ fungsi restriksi dari fungsi penjumlahan dan perkalian dengan skalar yang kontinu juga merupakan fungsi yang kontinu terhadap metrik d pada domain A , maka A merupakan ruang linear metrik bagian (atau ruang bagian saja). Diberikan X ruang linear metrik dengan metrik d dan H ruang bagian dari X . Dengan menggunakan pemetaan kanonik $\varphi: X \rightarrow X/H$ dapat didefinisikan metrik kuosen pada X/H yaitu: Untuk setiap $\hat{x}, \hat{y} \in X/H$, $d(\hat{x}, \hat{y}) = \inf\{d(\varphi(x), \varphi(y)) : \varphi(x) \in \hat{x}, \varphi(y) \in \hat{y}\}$ dengan $\hat{x} = x + H$ dan $\hat{y} = y + H$, untuk setiap $x, y \in X$. Ruang X/H terbukti ruang linear metrik kuosen (atau ruang kuosen saja). Jika $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ keluarga ruang linear metrik terhadap metrik $d_n < \delta_n$ dengan δ_n merupakan diameter X_n terhadap d_n dapat didefinisikan beberapa metrik produk pada $\tilde{\bigotimes}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ yaitu: Untuk setiap $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \tilde{\bigotimes}_{n \in \mathbb{N}} X_n$,

$$1. d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \quad 2. d(x, y) = \sup\{d_n(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\};$$

3. $d(x, y) = \inf\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} : \varphi > 1 \}$ merupakan metrik untuk $X = \tilde{\bigotimes}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ dengan $x_n = p_n(x)$ dan $y_n = p_n(y)$ sehingga $\tilde{\bigotimes}_{n \in \mathbb{N}} X_n$ merupakan ruang produk linear metrik (atau ruang produk saja).

b. Saran

Dalam penulisan ini baru dikemukakan tentang sebuah temuan baru dalam matematika analisis yaitu struktur ruang dalam ruang linear metrik. Belum dibahas tentang sifat – sifat utama dari ruang – ruang tersebut. Oleh karena itu perlu adanya kajian mendalam lebih lanjut tentang sifat – sifat tersebut. Selanjutnya dapat ditemukan fungsi linear kontinu antara ruang – ruang linear metrik untuk kemudian didefinisikan topologi dalam ruang fungsi linear kontinu antara ruang – ruang linear metrik tersebut.

VI. Daftar Pustaka

- Berberian, S.K., 1961, *Introduction to Hilbert Spaces*, Oxford University Press, New York.
- Darmawijaya, S., 2007, *Pengantar Analisis Abstrak*, Jurusan Matematika FMIPA UGM, Yogyakarta.
- Dugundji, J., 1966, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston.
- Dunford, N., and Schwartz, J.T., 1958, *Linear Operators*, Part I, Wiley-Interscience, New York.
- Husain, T., 1966, *Introduction to Topological Groups*, W.B. Saunders Company, Philadelphia.

- Khanna, Vijay K., Bhambri, S.K., 1993, *A Course in Abstract Algebra*, Vikas Publishing House PVT LTd, New Delhi.
- Kelly, J.L., 1955, *General Topology*, D. Van Nostrand Company Inc, Princeton.
- Marisson, T.J., 2000, *Fuctional Analysis: An Introduction to Banach Space Theory*, A Wiley-Interscience Series of Text, Monographs and Text.
- Rolewicz, S., 1972, *Metric Linear Spaces*, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa.
- Royden, H.L., 1989, *Real Analysis*, Macmillan Publishing Co., New York.
- Rudin, W., 1921, *Functional Analysis*, Mc Graw Hill Book Company, New York.
- Schaefer, H. H., 1966, *Topological Vektor Spaces*, The Macmillan Company, New York.
- Stone, M.H., 1932, *Linear Transformations in Hilber Space and their Applications to Analysis*, Math. Soc. Coll. Publ. 15. New York: American Mathematical Society.
- Taylor, A.E., 1958, *Introduction to Functional Analysis*, Wiley-Interscience, New York.
- Weidmann, J., 1976, *Linear Operator in Hilbert Spaces*, Heidelberg Berlin Inc., New York.