Dekomposisi Nilai Singular dan Aplikasinya

Oleh :
Gregoria Ariyanti
Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Widya Mandala Madiun
ariyanti_gregoria@yahoo.com

Abstrak

Dekomposisi nilai singular matriks riil A m x n adalah faktorisasi

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

dengan U matriks orthogonal m x m, V matriks orthogonal n x n dan Σ matriks diagonal m x n bernilai riil tak negatif yang disebut nilai-nilai singular.
Dengan kata lain Σ = diag ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$) terurut sehingga $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$.
Jika $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ maka

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \, u_i \, v_i^T \quad .$$

Selanjutnya, akan diuraikan aplikasinya dalam matriks yaitu untuk menentukan invers suatu matriks.
Jika A matriks taksingular n x n maka invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = V\,\Sigma^{-1}\,U^{\mathrm{T}}$$

dengan Σ^{-1} = diag $\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \ldots.., \frac{1}{\sigma_n}\right)$.

Kata – kata kunci : *dekomposisi nilai singular, nilai singular dan invers matriks*

A. Pendahuluan

Dalam teori matriks, dikenal beberapa teorema dekomposisi, di antaranya teorema faktorisasi LU dan teorema faktorisasi QR. Selanjutnya, terdapat dekomposisi yang dikenal dengan Dekomposisi Nilai Singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD). SVD terkait dengan nilai eigen dan nilai singular, yang hubungannya akan diuraikan dalam tulisan ini.

Definisi A.1

Untuk suatu matriks persegi A, terdapat vektor tak nol x dan suatu skalar λ sehingga

$$\mathrm{A}x = \lambda\, x \,,\, x \neq 0$$

Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan vektor $x \neq 0$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. (Goldberg , 1991 : 221)

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks persegi A, tulis A$x = \lambda\, x$ sebagai

$$\mathrm{A}x = \lambda\, \mathrm{I}x \text{ atau ekuivalen dengan } (A - \lambda I)x = 0 .$$

Untuk nilai eigen λ, persamaan tersebut mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika det $(A - \lambda I) = 0$ dan disebut persamaan karakteristik matriks A. (Anton, 1987 :302)

Contoh :

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, dibentuk persamaan karakteristik

$$\det\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix} - \lambda\, I\right\} = \det\left\{\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & 1-\lambda\end{bmatrix}\right\} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

Nilai eigennya adalah akar dari persamaan $(1-\lambda)^2 - 4 = 0$, yaitu $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 3$.

Definisi A.2

Diberikan A matriks dengan rank *r*.

Nilai eigen positif dari $\left(A^T A\right)^{1/2}$ disebut nilai singular dari A.

Dengan kata lain, jika σ adalah nilai singular dari A maka σ adalah nilai eigen positif dari $\left(A^T A\right)^{1/2}$, atau σ^2 adalah nilai eigen dari $A^T A$. (Goldberg, 1991:389)

Dari definisi di atas, dapat diketahui hubungan antara nilai eigen dan nilai singular. Dengan kata lain, untuk matriks A dengan rank *r* dan nilai-nilai eigen dari matriks A^TA adalah $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots\ldots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+1} = \ldots\ldots = \lambda_n = 0$, maka

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, r, r+1, \ldots, n$ disebut nilai singular dari matriks A.

Contoh :

Untuk menentukan nilai singular dari $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari $A^TA = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ dan nilai eigen dari A^TA adalah $\left(3 \pm \sqrt{5}\right)/2$ serta nilai singular dari A adalah $\sqrt{\left(3 \pm \sqrt{5}\right)/2}$.

Berikut diberikan definisi nilai singular yang dihubungkan dengan vektor singular kiri dan vektor singular kanan.

Definisi A.3

Misalkan A matriks real berukuran *m* x *n*.

Bilangan real positif σ disebut nilai singular dari matriks A jika ada vektor taknol $u \in R^m$ dan $v \in R^n$ sehingga

$$Av = \sigma u \text{ dan } A^T u = \sigma v.$$

Vektor *u* disebut vektor singular kiri dan *v* disebut vektor singular kanan.

Selanjutnya, (σ, v) disebut pasangan singular kanan dari A dan (σ, u) disebut pasangan singular kiri dari A.

Hubungan antara suatu matriks dengan rank tertentu dan nilai singular tak nol dari matriks tersebut diberikan dalam teorema berikut ini.

Teorema A.1

Diberikan matriks A dengan rank *r*.

Maka terdapat tepat sejumlah *r* nilai singular tak nol matriks A.

Bukti :

Misalkan nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots. \geq \lambda_n$.

Hal ini berarti terdapat sejumlah *n* vektor eigen $x_1, x_2, ..., x_n$ yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut.
Himpunan vektor eigen $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ membentuk basis orthogonal untuk **R**
Dengan menormalisasikan basis orthogonal tersebut, diperoleh basis orthonormal.
Perhatikan nilai $\langle P_i , P_j \rangle$.
Untuk $i \neq j$, nilai $\langle P_i , P_j \rangle = 0$, dan untuk $i = j$, nilai $\langle P_i , P_j \rangle = 1$.
Akibatnya $\langle AP_i, AP_i \rangle = (AP_i)^T (AP_i) = P_i AA^T P_i = \lambda_i \|P_i\|^2$, akibatnya $\lambda_i > 0$.
Menurut definisi nilai singular , berlaku $\sigma_i^2 = \lambda_i = \|AP_i\|^2$, untuk setiap *i*.
Rank matriks A sama dengan dimensi ruang kolomnya yaitu dim$\{Ax \mid x \in \mathrm{R}^m\}$.
Karena diketahui rank (*A*) = *r*, maka
$AP_1 = AP_2 = \ldots = AP_r \neq 0$, dan $AP_{r+1} = AP_{r+2} = \ldots = AP_n = 0$.
Jadi diperoleh $\sigma_i \neq 0$, untuk $i = 1,2,3,..., r$.

Selanjutnya, tulisan ini membahas tentang dekomposisi nilai singular (*singular value decomposition*/SVD) beserta contoh dalam matriks. SVD digunakan dalam menentukan invers yang selanjutnya dapat menyelesaikan sistem persamaan linier.

B. Dekomposisi Nilai Singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD)

Suatu proses dekomposisi akan memfaktorkan sebuah matriks menjadi lebih dari satu matriks. Demikian halnya dengan Dekomposisi Nilai Singular (*Singular Value Decomposition*) atau yang lebih dikenal sebagai SVD, adalah salah satu teknik dekomposisi berkaitan dengan nilai singular (*singular value*) suatu matriks yang merupakan salah satu karakteristik matriks tersebut.

Definisi B.1
Dekomposisi nilai singular matriks riil *A m* x *n* adalah faktorisasi

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

dengan *U* matriks orthogonal *m* x *m*, *V* matriks orthogonal *n* x *n* dan Σ matriks diagonal *m* x *n* bernilai riil tak negatif yang disebut nilai-nilai singular.
Dengan kata lain Σ = diag $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ terurut sehingga $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$.
Jika $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ maka

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \, u_i \, v_i^T \quad .$$

Teorema tersebut juga menyatakan bahwa matriks A_{mxn} dapat dinyatakan sebagai dekomposisi matriks yaitu matriks *U*, Σ dan *V* . Matriks Σ merupakan matriks diagonal dengan elemen diagonalnya berupa nilai-nilai singular matriks *A*, sedangkan matriks *U* dan *V* merupakan matriks-matriks yang kolom-kolomnya berupa vektor singular kiri dan vektor singular kanan dari matriks *A* untuk nilai singular yang bersesuaian.

Menentukan SVD meliputi langkah-langkah menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks AA^T atau A^TA. Vektor eigen dari A^TA membentuk kolom V, sedangkan vektor eigen dari AA^T membentuk kolom U. Nilai singular dalam Σ adalah akar pangkat dua dari nilai-nilai eigen matriks AA^T atau A^TA. Nilai singular adalah elemen-elemen diagonal dari Σ dan disusun dengan urutan menurun.

Contoh :

Tentukan SVD matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk menentukan vektor singular kiri, dimulai dengan AA^T. Yaitu,

$$AA^T = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, menentukan nilai eigen dari AA^T , yaitu $\lambda = 10$ dan $\lambda = 12$.

Diperoleh nilai singular dari A yaitu $\sqrt{10}$ dan $\sqrt{12}$.

Untuk $\lambda = 10$, diperoleh :

$$(11-10)x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = -x_2.$$

Maka vektor eigen $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 10$.

Untuk $\lambda = 12$, diperoleh

$$(11-12)x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2.$$

Maka vektor eigen $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 12$.

Dengan menormalisasikan u_1 dan u_2 diperoleh

$$\overline{u_1} = \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{u_2} = \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, dicari nilai eigen dari

$$A^TA = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

dan nilai eigen dari A^TA, yaitu $\lambda = 0$, $\lambda = 10$ dan $\lambda = 12$.

Diperoleh nilai singular dari A yaitu 0, $\sqrt{10}$ dan $\sqrt{12}$.

Dengan mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen diperoleh

$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 0$

$u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 10$

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 12$.

Akibatnya, vektor-vektor singular kanan yang orthonormal adalah

$$\overline{v_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} ; \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{v_3} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

Jadi , $V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$

Dari proses di atas, diperoleh SVD matriks tersebut adalah

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

C. Menentukan Invers Matriks

Jika sebuah matriks sudah dinyatakan dalam perkalian beberapa matriks melalui dekomposisi nilai singular, maka dengan menggunakan definisi invers suatu matriks dan sifat matriks orthogonal maka dapat ditentukan invers dari hasil dekomposisi nilai singular pada matriks yang diberikan.

Definisi C.1

Misalkan A matriks nxn . Matriks A disebut orthogonal jika $A^T = A^{-1}$.

Dari definisi di atas, diperoleh invers matriks dari suatu matriks

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \left(U\Sigma V^T\right)^{-1} \\ &= \left(V^T\right)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} \\ &= \left(V^{-1}\right)^{-1}\Sigma^{-1}U^T \\ &= V\Sigma^{-1}U^T \end{aligned}$$

dengan $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n \end{bmatrix}$

Contoh:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Dari matriks $A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ diperoleh nilai eigen $\lambda = 2$ dan $\lambda = 8$.

Dan, vektor – vektor eigen yang bersesuaian masing-masing adalah

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Demikian juga nilai singular matriks A adalah $\sigma = \sqrt{2}$ dan $\sigma = 2\sqrt{2}$.
Akibatnya,

$$Av_1 = \sigma_1 u_1 v_1^T v_1 = \sigma_1 u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ dengan } u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av_2 = \sigma_2 u_2 v_2^T v_2 = \sigma_2 u_2 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi SVD dari matriks A adalah

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Dengan SVD matriks A dapat ditentukan invers matriks A yaitu

$$\begin{aligned} A^{-1} &= V\Sigma^{-1}U^T \\ &= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D. Penutup

Dekomposisi nilai singular adalah suatu proses memfaktorkan sebuah matriks menjadi lebih dari satu matriks, yaitu perkalian antara matriks diagonal yang memuat nilai-nilai singular (Σ) dengan matriks yang memuat vektor-vektor singular yang bersesuaian (U dan V).

Karena proses memfaktorkan yang cukup rumit, perlu ada pengembangan lebih lanjut dengan melakukan reduksi rank guna mengurangi waktu komputasi.

E. Daftar Pustaka

Anton, Howard.1987. *Elementary Linear Algebra*. Singapore : John Wiley & Sons

Goldberg, Jack L. 1991. *Matrix Theory with Applications*. United States of America : McGraw-Hill Inc.

Jody S. Hourigan and Lynn V. McIndoo, *The Singular Value Decomposition*. online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/.../JodLynn/report2.pdf diakses tanggal 10 September 2010.

Lay, D.C. 1996. *Linear algebra and its applications, 2nd ed. Reading*, MA: Addison-Wesley.

http://www.ling.ohio-state.edu/~kbaker/pubs/ Singular_Value_Decomposition_Tutorial.pdf diakses tanggal 16 November 2010.