Penyelesaian Persamaan Differensial dan Persamaan Linear - non Linear dengan Metode Kesamaan.

Oleh :
Abraham Salusu
Jurusan Matematika , Binus University, Jakarta Barat
Kampus Angrek , Jl. Kebon Jeruk Raya 27 Jakarta Barat
abraham_salusu@yahoo.com

Abstrak

Penyelesaian persamaan differensial maupun persamaan linear dan non linear selama ini sudah mengikuti cara yang biasa dengan memperhatikan bentuk dari persamaan. Persamaan differensial simultan dan persamaan non linear mempunyai penyelesaian yang berbeda.

Metode kesamaan merupakan suatu bentuk penyelesaian persamaan differensial maupun persamaan linear – non linear yang sederhana dan tidak memerlukan banyak pengetahuan tentang teorema persamaan differensial maupun persamaan non linear. Metode kesamaan hanya mengusahakan bentuk persamaan berada dalam bentuk asli yaitu jumlah harus selalu tetap.

Kata kunci : Persamaan Differensial, linear, non linear, kesamaan

I. Pendahuluan .

Penyelesaian persamaan differensial atau persamaan Differensial parsial maupun mencari akar suatu persamaan linear dan non linear selama ini sudah mengikuti cara yang lasim digunakan misalnya penyelesaian khusus biasanya dilakukan dengan mencoba apakah hasilnya sudah benar..

Penyelesaian persamaan differensialo maupun menacari akar suatu persamaan dapat dilakukan dengan metode kesamaan yaitu mengusahakan bentuk persamaan tetap dalam bentuk kesamaan . Penyelesaian persamaan tidak memerlukan banyak teori , tetapi hanya menterjemahkan maksud dari persaman dan mengusahakan tetap berada dalam bentuk yang selalu sama.

II. Persamaan differensial

II.1. Mencari Penyelesaian Persamaan Differensial

Penyelesaian Khusus

Untuk menyelesaikan persamaan differensial orde 1 yang berbentuk $f\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = g(x)$ dapat dilakukan dengan membuat 2 bagian dari persamaan yaitu $\frac{dy}{dx}$ dan $y = g(x)$ kemudian y disubstitusikan ke persamaan $\frac{dy}{dx}$ dan seterusnya hingga didapat kesamaan sepewrti berikiut :

II.1. 1 Bila : $g(x) = a\,x^m$

$$\frac{dy}{dx} + 2\,y = x^2.$$

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema "Peningkatan Kontribusi Penelitian dan Pembelajaran Matematika dalam Upaya Pembentukan Karakter Bangsa " pada tanggal 27 November 2010 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Bagilah persamaan tersebut menjadi dua bagian / suku sebagai berikut :

$2y = x^2$ dan $\frac{dy}{dx} = .0$ kedua bagian jumlahnya sama dengan x^2 atau dalam bentuk tabel seperti berikut :

Tabel 2.1

$2y =$	$\frac{dy}{dx} = .$
x^2	x
$-x$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0

Kolom sebelah kiri diturunkan setelah dibagi dengan 2 diperoleh x (kolom kanan), kemudian tandanya diubah dan dimasukkan ke kolom kiri dan bila dijumlahkan hasilnya

$= x^2$. Kolom kiri $-x$ diturunkan lagi setelah dibagi dengan 2 diperoleh $-\frac{1}{2}$ dan tandanya diubah masukkan kekolom kiri, turunannya 0 . Kedua kolom bila diujumlahkan hasilnya

tetap x^2. Jadi Penyelesaian khusus adalah : $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ (a)

Persamaan Komplementer

$\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$ diubah menjadi :

$$\frac{dy}{dx} = x \qquad (1) \quad dan \quad 2y = -x \qquad (2)$$

Untuk penyelesaian kasus (1)

x diintegralkan kemudian dikalikan ndengan 2 diletakkan padsa kolom kedua, kemudian diubah tandanyaq dimsukkan dalam kolom pertama dan bila dijumlahkan hasilnya sama dengan nol. Demikian seterusnya hingga didapat :

$$2y = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{6}x^4 - \frac{2}{15}x^5$$

seperti pada tabel berikut :

Tabel 2.2

$\frac{dy}{dx} = x$		2y
$-x^2$		x^2
$\frac{2}{3}x^3$		$-\frac{2}{3}x^3$
$-\frac{2}{6}x^4$		$\frac{2}{6}x^4$
$\frac{2}{15}x^5$		$-\frac{2}{15}x^5$

Selanjutnya penyelesaian kasus (2)

Kolom bagian kiri dibagi 2 kemudian diturunkan dan diletakkan pada kolom bagian kanan, selanjutnya tandanya diubah dan diletakkan pada kolom bagian kiri dan seterusnya sehingga didapat

$$2y = x - \frac{1}{2}$$

Tabel 2.3

2y = -x		$\frac{dy}{dx}$
$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$
		0

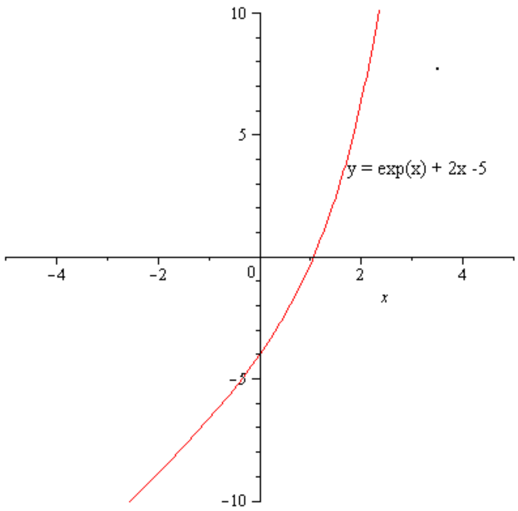
Penyelesaian kasus 1 dan 2 dijumlahkan diperoleh Penyelesaian dari persamaan komplementer. yaitu :

$$y = \frac{1}{2} - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{6}x^4 - \frac{2}{15}x^5$$

Ini adalah bentuk dari $C\,e^{-2x}$ *dimana* $C = 2$

demikian juga bila dkimisalkan $\frac{dy}{dx} = x^2$ *dan* $2y - -x^2$ akan diperoleh hasil yang sama dan

hanya akan memberikan nilai C yang berbeda.



Gambar 2-1

Jadi Penyelesaian Umum dari Persamaan

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2.$$

adalah

$$y = C\,e^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

II.1. 2 Bila : $g(x) = e^{mx}$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

Ini dapat dilakukan dengan 2 cara demikian

Tabel 2.4

$2y$	$\frac{dy}{dx}$
e^{3x}	$\frac{3}{2}e^{3x}$
$-\frac{3}{2}e^{3x}$	$-\frac{9}{4}e^{3x}$
$\frac{9}{4}e^{3x}$	$\frac{27}{8}e^{3x}$
$-\frac{27}{8}e^{3x}$	$\frac{81}{16}e^{3x}$

Tabel 2.5

$\frac{dy}{dx}$	$2y$
e^{3x}	$\frac{2}{3}e^{3x}$
$-\frac{2}{3}e^{3x}$	$-\frac{4}{9}e^{3x}$
$\frac{4}{9}e^{3x}$	$\frac{8}{27}e^{3x}$
$-\frac{8}{27}e^{3x}$	$-\frac{16}{81}e^{3x}$

$$2y = \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \frac{81}{16} - \ldots\ldots\ldots\right)e^{3x}$$

$$2y = \left(\frac{1}{1+\frac{3}{2}}\right)e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{5}e^{3x}$$

$$2y = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \ldots\ldots\ldots\right)e^{3x}$$

$$y = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{2}{3}}e^{3x} = \frac{1}{5}e^{3x}$$

Hasilnya sama

Catatan :

$$1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \ \ldots\ldots \ = \frac{1}{1+x}$$

II.1. 3 Bila : g(x) = sin(ax) atau cos (ax)

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin(2x)$$

Tabel 2.6 Tabel 2.7

$2y$	$\frac{dy}{dx}$
sin(2x)	cos(2x)
-cos(2x)	sin(2x)
-sin(2x)	-cos(2x)
cos(2x)	-sin(2x)

Atau ditukar menjadi

$\frac{dy}{dx}$	$2y$
sin(2x)	-cos(2x)
cos(2x)	sin(2x)
-sin(2x)	cos(2x)
-cos(2x)	-sin(2x)

2y =sin(2x)-cos(2x)-sin(2x)+cos(2x)+ sin(2x) -.....

$$y=\frac{1}{2}(\sin(2x)-\cos(2x)-\sin(2x)+\cos(2x)+\sin(2x)-.....)$$

$$y=\frac{1}{2}(1-1+1-1+1)\sin(2x)-\frac{1}{2}(1-1+1-1+1$$
$$-\ )\cos(2x)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+1}\sin(2x)-\frac{1}{1+1}\cos(2x)$$

$$y=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{4}\cos(2x)$$

Untuk tabel ke-2

$$2y=-\cos(2x)+\sin(2x)+\cos(2x)-\sin(2x)-\cos(2x)$$
$$+\sin(2x)+\cos(2x)+......$$

$$y=\frac{1}{2}(-\cos(2x)+\sin(2x)+\cos(2x)-\sin(2x)-\cos(2x)$$
$$+\sin(2x)+\cos(2x)-\sin(2x)......)$$

$$y=\frac{1}{2}(-\cos(2x)+\cos(2x)-\cos(2x)+\cos(2x)-...)$$
$$+\frac{1}{2}(\sin(2x)-\sin(2x)+\sin(2x)-\sin(2x)......)$$

$$y=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1}\right)\cos(2x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1}\right)\sin(2x)$$

$$y=-\frac{1}{4}\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

Keduanya sama

II.2. Mencari Penyelesaian Persamaan Simultan

$$\frac{dx}{dt}-y=e^{2t}$$

$$\frac{dy}{dt}+4x=0$$

Tabel 2.8

$\frac{dx}{dt}$	$4x$	$\frac{dy}{dt}$	$-y$	$\frac{dx}{dt}$
e^{2t}				e^{2t}
	$+2e^{2t} \rightarrow$	$-2e^{2t} \rightarrow$	$e^{2t} \rightarrow$	$-e^{2t} \rightarrow$ *ke kolom* (2)
	$-2e^{2t} \rightarrow$	$+2e^{2t} \rightarrow$	$-e^{2t} \rightarrow$	$+e^{2t} \rightarrow$ *ke kolom* (2)
	$+2e^{2t} \rightarrow$	$-2e^{2t} \rightarrow$	$+e^{2t} \rightarrow$	$-e^{2t} \rightarrow$ *dan setgerusnya*

ke kolom (2)

$$4x = 2e^{2t} - 2e^{2t} + 2e^{2t} + \ldots\ldots$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1}\right)e^{2t} = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$-y = e^{2t} - e^{2t} + e^{2t}$$

$$y = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

Cara yang biasa

$Dx - y = e^{2t}$ (1)

$4x + Dy = 0$ (2) Persamaan (1) dikalikan dengan D dan dijumlahkan dengan persamaan (2)

$D^2x - Dy = 2e^{2t}$

$4x + Dy = 0$

diperoleh $(D^2 + 4)x = 2e^{2t}$ mempunyai Penyelesaian khusus

$x = \frac{1}{8}2e^{2t} = \frac{1}{4}e^{2t}$ masukkan dalam persamaan (1) diperoleh $y = -\frac{1}{2}e^{2t}$

II.3. Mencari Akar suatu Persamaan

II.3. 1 Persamaan Polinomial

$x^2 + 2x - 6 = 0$ hasilnya -3,645751311 dan 1.64575131

Persamaan diubah menjadi

$x^2 + 2x = 6$ ambil $x^2 = 6$.

Caranya cari akar dari 6 yaitu $\sqrt{6}$ kolom (6) kemudian dikalikan dengan 2 hasilnya dikolom (2)

Tabel 2.9

x^2	2x	Jumlah	harusnya	selisih	x
6	4.89898	10.899	6	4.89898	2.44949
1.10102	2.09859	3.19961	6	-2.8004	1.0493

Selisih di kolom (5) dikurangkan dengan 6 di kolom (1) diperoleh 1,10102
Demikian seterusnya hingga didapat nilai selisih sama dengan 0 atau cukup kecil bila akar bukan bilangan bulat.

Tabel 2.10

x^2	2x	Jumlah	harusnya	selisih	x
3.90141	3.9504	7.85181	6	1.85181	1.9752
2.0496	2.86329	4.91289	6	-1.0871	1.43164
3.13671	3.54215	6.67887	6	0.67887	1.77108
2.45785	3.1355	5.59335	6	-0.4066	1.56775
2.8645	3.38496	6.24946	6	0.24946	1.69248
2.61504	3.23421	5.84925	6	-0.1508	1.61711
2.76579	3.32613	6.09192	6	0.09192	1.66307
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
2.7085	3.29151	6.00001	6	1.2E-05	1.64575

Jadi akarnya adalah $\dfrac{3.29151}{2}$ = 1.645755

II.3. 2 Persamaan non linear

a). Logaritma : $\ln(x) + x - 2 = 0$ Hasilnya = 1.55715

Tabel 2-11

ln(x)	x	jumlahnya	seharusnya	selisih
0.69314718	2	2.69314718	2	0.69315
0.26762182	1.3068528	1.57447464	2	-0.4255
0.54949514	1.7323782	2.28187332	2	0.28187
0.37191168	1.4505049	1.82241654	2	-0.1776
0.48740652	1.6280883	2.11549484	2	0.11549
0.41382572	1.5125935	1.9264192	2	-0.0736
0.46132501	1.5861743	2.04749929	2	0.0475
0.43092165	1.538675	1.96959665	2	-0.0304
0.45048841	1.5690783	2.01956676	2	0.01957
. . 0.44271235	1.5569244	1.99963676	2	-0.0004

Jadi akarnya adalah 1.5569244

b). Eksponensial $e^{x} + 2x = 5$

Tabel 2.12

exp(x)	2x	Jumlah	Selisih
5	3.2188758	8.2188758	3.2188758
1.7811242	1.1544894	2.9356136	-2.064386
3.8455106	2.6938128	6.5393233	1.5393233
2.3061872	1.6711912	3.9773785	-1.022622
3.3288088	2.405229	5.7340378	0.7340378
. . 2.8826087	2.1173914	5	3.612E-08
2.8826086	2.1173913	5	-2.51E-08

x = 1.0586957

III. Kesimpulan .

Penyelesaian Persamaan dengan menggunakan metode kesamaan dapat dilakukan pada Persamaan Differensial maupun Persamaan Differensial Simultan dan juga dalam mencari akar suatu peresamaan. Metode kesamaan tidak memerlukan banyak teori atau rumus-rumus dan lebih mudah untuk dimengerti, hanya biasanya akanmenggunakan waktu yang agak lama. Metode ini justru akan lebih mudah dalam membuat program dalam penyelesaian suatu persamaan.

IV. Daftar Pustaka .