

DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF GEARSRI KUNTARI¹, TRI ATMOJO K.², NUGROHO A.S., RINDANG P.^{1,2} ¹Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Sebelas Maret¹kuntari@uns.ac.id, ² trikusma@uns.ac.id**Abstrak**

Diberikan G dengan himpunan berhingga *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak dari *vertex* u ke *vertex* v di G , dinotasikan $d(u,v)$, adalah panjang dari *path* terpendek dari *vertex* u ke v . Eksentrisitas *vertex* u dalam graf G adalah jarak maksimum dari *vertex* u ke sebarang *vertex* yang lain di G , dinotasikan $e(u)$. *Vertex* v disebut *vertex* eksentrik dari u jika $d(u,v) = e(u)$. Sedangkan untuk menentukan jarak dari *vertex* u ke sebarang *vertex* v dalam graf G digunakan algoritma Breadth First Search (BFS) Moore yang diambil dari Chartrand dan Oellermann [3]. Digraf eksentrik $ED(G)$ dari suatu graf G adalah suatu graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan himpunan *vertex* G , dan terdapat suatu *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan *vertex* u ke v jika v adalah suatu *vertex* eksentrik dari u . Boland dan Miller [1] memperkenalkan digraf eksentrik dari suatu digraf. Mereka memberi saran untuk menemukan digraf eksentrik dari bermacam kelas graf. Di sini diselidiki digraf eksentrik dari salah satu kelas graf yaitu graf *gear*.

Kata kunci: eksentrisitas, digraf eksentrik, graf *gear*.

PENDAHULUAN

Pengertian dan notasi yang berkaitan dalam makalah ini diambil dari Chartrand dan Lesniak [2] serta Harris *et al.* [7]. Diketahui graf G dengan himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak dua *vertex* u dan v dalam G , dinotasikan dengan $d(u,v)$, merupakan panjang *path* terpendek dari *vertex* u ke *vertex* v . Jika tidak ada *path* yang menghubungkan kedua *vertex*, $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas dari *vertex* u dalam graf G didefinisikan sebagai jarak maksimum dari *vertex* u ke sebarang *vertex* lainnya dalam G . eksentrisitas *vertex* u dinotasikan sebagai $e(u) = \max\{d(u, v) \mid v \in V(G)\}$. Sedangkan *vertex* v merupakan *vertex* eksentrik dari *vertex* u jika $d(u,v) = e(u)$. Digraf eksentrik dari graf G yaitu $ED(G)$ adalah graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan G , $V(ED(G)) = V(G)$ dan terdapat *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan setiap *vertex* dalam G ke *vertex* eksentriknya. Suatu *arc* dalam digraf D dikatakan *arc* simetri jika *arc* tersebut menghubungkan *vertex* u dan v , demikian juga sebaliknya.

Dalam perkembangan di bidang Matematika, eksentrisitas suatu graf telah banyak diteliti diantaranya dapat dilihat pada barisan eksentrik dan *cycle* dalam graf [8], karakterisasi dari digraf eksentrik [6] dan diameter determinasi pada keluarga graf tertentu [4]. Sedangkan penyelidikan digraf eksentrik dari graf ladder telah

dipublikasikan oleh Kusmayadi dan Rivai [9] serta eksentrik digraf dari graf lintang oleh Kusmayadi dan Fathmawatie [10]. Telah dipublikasikan juga eksentrisitas dari graf buku oleh Kuntari et al. [11]. Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik pada kelas graf yang lain yaitu graf gear.

PEMBAHASAN

Graf *wheel* berorder n dengan $n \geq 3$, menurut Gallian [5] adalah suatu graf yang terdiri dari *cycle* berorder $n-1$ dan setiap *vertex* dalam *cycle* dihubungkan dengan satu *vertex* di luar *cycle*. Sedangkan graf *gear* berorder n , $n \geq 3$ adalah graf *wheel* berorder n ditambahkan satu *vertex* pada setiap *edge cycle*. Diperlukan tiga langkah dalam menentukan digraf eksentrik dari graf tersebut. Langkah pertama adalah menentukan jarak dari *vertex* u ke *vertex* v dalam graf G yang merupakan panjang lintasan terpendek dari *vertex* u ke *vertex* v . Tetapi, jika tidak ada lintasan yang menghubungkan kedua *vertex* tersebut, $d(u,v) = \infty$. Selanjutnya untuk menentukan jarak dari *vertex* u ke sembarang *vertex* v dalam graf G digunakan algoritma Breadth First Search (BFS) Moore yang diambil dari Chartrand and Oellermann [3] yaitu

1. diambil salah satu *vertex* dalam graf G , misal u dan dilabeli 0 yang menyatakan jarak u ke dirinya sendiri, sedangkan semua *vertex* u dilabeli ∞ ,
2. semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan u dilabeli 1,
3. semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 1 dilabeli 2, dan seterusnya sampai *vertex* yang dimaksud misal v berjarak hingga. Label setiap *vertex* menyatakan jarak dari *vertex* u .

Langkah kedua menentukan *vertex* eksentrik dari *vertex* u , dinotasikan dengan $e(u)$, yaitu *vertex* dalam graf G yang memiliki jarak maksimum dari u . *Vertex* v adalah suatu *vertex* eksentrik dari u jika $d(u,v) = e(u)$. Langkah ketiga, menghubungkan *vertex* u dengan *vertex* eksentriknya dengan suatu *arc* d diperoleh digraf eksentrik dari graf yang diberikan.

Diberikan graf *gear* G_n , $n \geq 3$ dengan himpunan *vertex* $V(G_n) = \{v, u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dan himpunan *edge* $E(G_n) = \{vu_i, u_iw_i, w_iu_{i+1(\text{mod } n)} \mid i=1, 2, \dots, n\}$. Digraf eksentrik dari graf *gear* disajikan dalam Teorema 1.

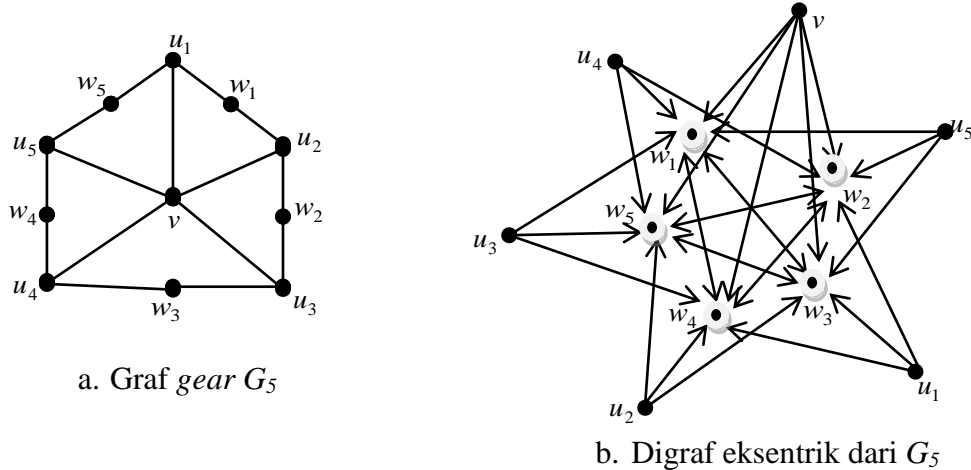
Teorema 1. Diberikan graf *gear* G_n , $n \geq 3$. Digraf eksentrik dari graf *gear* adalah $S_3 \cup 3P_2$ untuk $n=3$ dan $C(2, 3, \dots, n-2) \cup nS_{n-2} \cup S_n$ untuk $n>3$ dengan S_n graf bintang, P_n graf lintasan masing-masing berorder n dan $C(k, k+1, \dots, n-1)$ graf *circulant*.

Bukti. Menggunakan algoritma BFS Moore diperoleh eksentrisitas dari v adalah 2 dengan *vertex* eksentriknya w_i , $i=1, 2, \dots, n$. Eksentrisitas dari u_i , $i=1, 2, \dots, n$ adalah 3 dengan *vertex* eksentriknya $w_{i+1(\text{mod } n)}$ untuk $n=3$ dan $w_{i+1(\text{mod } n)}, w_{i+2(\text{mod } n)}, \dots, w_{i+n-2(\text{mod } n)}$ untuk $n>3$. Sedangkan eksentrisitas dari w_i adalah 4 dengan *vertex* eksentriknya $w_{i+2(\text{mod } n)}, w_{i+3(\text{mod } n)}, \dots, w_{i+n-2(\text{mod } n)}$, $i=1, 2, \dots, n$. Terbentuk *arc* dengan menghubungkan antara *vertex* dan *vertex* eksentriknya. *Arc* yang simetrik adalah $w_iw_{i+2(\text{mod } n)}, w_iw_{i+3(\text{mod } n)}, \dots, w_iw_{i+n-2(\text{mod } n)}$, $i=1, 2, \dots, n$, dan *arc* yang lain tidak simetrik. Berdasarkan *arc* yang telah diperoleh dapat dibentuk digraf eksentrik dari graf *gear* adalah $S_3 \cup 3P_2$ untuk $n=3$ dan untuk $n>3$ adalah $C(2, 3, \dots, n-2) \cup nS_{n-2} \cup S_n$. \square

Gambar 1 merupakan contoh graf *gear* G_5 (a) dan digraf eksentriknya (b).

Selanjutnya disajikan teorema sebagai perluasan dari graf *gear* yang disebut sebagai graf 2-*gear*, yaitu dua graf *gear* yang salah satu *vertex* pada *cycle* dari kedua graf

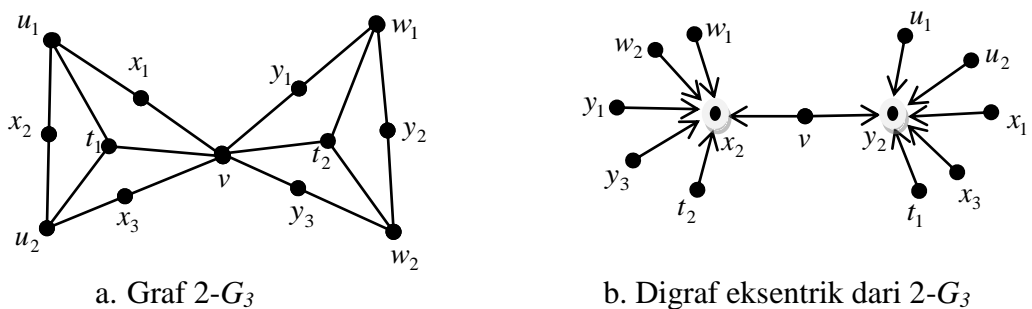
saling berhimpit. Graf 2-gear berorder n disimbulkan dengan $2-G_n$, yang mempunyai himpunan vertex $V(2-G_n) = \{ v, t_1, t_2, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \}$ dan himpunan edge $E(2-G_n) = \{ vt_1, vt_2, u_i x_i, x_{i+1} u_i, x_i v, v x_n, y_i w_i, w_i y_{i+1}, y_n v, v y_1 \mid i=1, 2, \dots, n \}$. Teorema 2 menyajikan eksentrisitas dari graf ini.



Gambar 1. Graf gear G_5 dan digraf eksentriknya

Teorema 2. Diberikan graf $2-G_n, n \geq 3$. Digraf eksentrik dari graf $2-G_n$ adalah $K_{5,1} \cup P_3 \cup K_{1,5}$ untuk $n=3$ dan $K_{n+2, n-2} \cup K_{n-2, n-2} \cup K_{n-2, n+2} \cup S_{2(n-2)}$ untuk $n > 3$.

Bukti. Menggunakan algoritma BFS Moore diperoleh eksentrisitas dari v adalah 3 dengan vertex eksentriknya adalah $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$. Eksentrisitas dari t_1 dan t_2 adalah 4, eksentrisitas dari u_i dan w_i adalah 5. Vertex eksentrik dari t_1, u_i, x_j adalah y_2, y_3, \dots, y_{n-1} sedangkan vertex eksentrik dari t_2, w_i, y_j adalah x_2, x_3, \dots, x_{n-1} dengan $i=1, 2, \dots, n-1$ dan $j=1, 2, \dots, n$. Terbentuk arc dengan menghubungkan antara vertex dan vertex eksentriknya. Arc yang simetrik adalah $x_i y_i, i=2, 3, \dots, n-1$, dan arc yang lain tidak simetrik. Dengan memperhatikan arc yang terbentuk diperoleh digraf eksentrik dari graf $2-G_n$ adalah $K_{5,1} \cup P_3 \cup K_{1,5}$ untuk $n=3$ dan $K_{n+2, n-2} \cup K_{n-2, n-2} \cup K_{n-2, n+2} \cup S_{2(n-2)}$ untuk $n > 3$. □
Gambar 2 merupakan graf $2-G_3$ (a) dan digraf eksentriknya (b).



Gambar 2. Graf $2-G_3$ dan digraf eksentriknya

PENUTUP

Berkaitan dengan graf gear dapat dibentuk lebih umum menjadi graf n-gear dan menggunakan algoritma BFS Moore dapat disajikan digraf eksentrik dari graf tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boland, J. and M. Miller, *The Eccentric Digraph of a Digraph*, Proceeding of AWOCA'01, Lembang-Bandung, Indonesia, 2001.
- [2] Chartrand, G. And L. Lesniak, *Graphs and Digraphs* 3rd ed., Chapman and Hall/RCR, New York, 1996.
- [3] Chartrand, G. and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc, California, 1993.
- [4] Corneil, D. G., F.F. Dragan, M. Habib and I. Paul, Diameter Determination on Restricted Graph Families, *Discrete Applied Mathematics* 113:143-166, 2001.
- [5] Galian, J. A., A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics* 17: 1-246, 2010.
- [6] Gimbert, J., N. Lopez, M. Miller and J. Ryan, Characterization of Eccentric Digraphs, *Discrete Mathematics* 306:210-219, 2006.
- [7] Harris, J. M., J. L. Hirst and M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory* 2nd ed.. Springer, New York, 2000.
- [8] Haviar, A., P. Hrnčiar and G. Monoszava, Eccentric Sequence and Cycles in Graphs, *Acta Univ. M. Belii Math* no 11:7-25, 2004.
- [9] Kusmayadi, T. A. and M. A. Rivai, The Eccentric Digraph of Ladder Graph, *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2010 “ Matematika dalam Riset Teknologi dan Pendidikan “* :16-26, 2010.
- [10] Kusmayadi, T. A. dan F. Fathmawatie, The Eccentric Digraph of a Lintang Graph, *Math-Info* vol 1 no 12: 8-12, Juli 2008.
- [11] Kuntari, S., N. A. Sudibyso dan T. A. Kusmayadi, Digraf Eksentrik dari Graf Buku, *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA*, FMIPA UNY: M223-M226, 2011.