

PENGUNAAN METODE BAYESIAN SUBYEKTIF DALAM PENGONSTRUKSIAN GRAFIK PENGENDALI-*p*

Sekar Sukma Asmara¹, Adi Setiawan², Tundjung Mahatma³

¹ Mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana

^{2,3} Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana

¹qkhasweetie@yahoo.com, ²adi_setia_03@yahoo.com, ³t.mahatma@gmail.com

Abstrak

Pengendalian kualitas mempunyai suatu peran penting dalam produksi barang, dan dapat dilakukan dengan menggunakan metode statistik. Salah satunya adalah grafik pengendali-*p*. Penelitian ini menggunakan data proses produksi pengolahan ayam selama Juni-September 2012 pada PT. "X". Pada grafik pengendali-*p* klasik diperoleh *centerline* (CL)=0,306, *lower control limit* (LCL)=0,1678, dan *upper control limit* (UCL)=0,4443. Dalam makalah ini dijelaskan bagaimana penggunaan metode Bayesian subyektif untuk melakukan estimasi titik dengan distribusi sampel Binomial. Dengan menggunakan prior berdistribusi seragam pada (0,1) atau Beta(1,1) dan tingkat signifikansi $\alpha = 0,0027$, diperoleh $CL=0,3098$, $LCL=0,1827$, dan $UCL=0,4518$. Dengan menggunakan prior berdistribusi Beta(30,2981;68,7019) dan tingkat signifikansi yang sama, diperoleh $CL=0,306$, $LCL=0,2129$, dan $UCL=0,4068$. Hanya pada grafik pengendali-*p* dimana priornya berdistribusi Beta(30,2981;68,7019) terdapat 1 sampel yang *out of control* yaitu sampel ke 71 sehingga dapat disimpulkan bahwa proses tersebut tidak terkendali dan oleh karena itu perlu diperiksa penyebabnya serta diambil tindakan perbaikan.

Kata kunci : grafik pengendali-*p*, Bayesian subyektif, Binomial, prior, Beta.

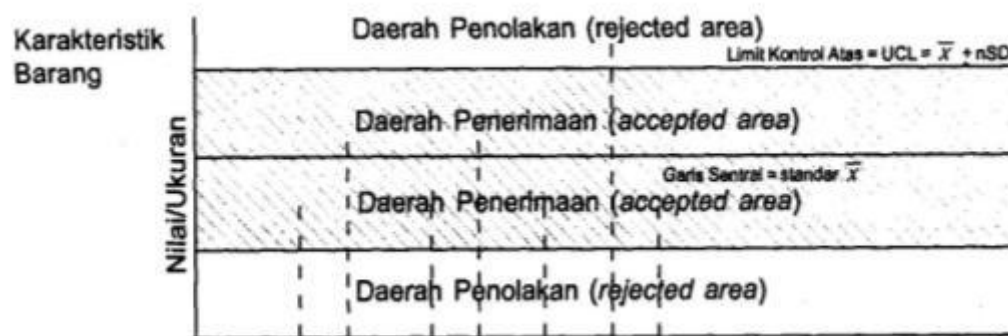
PENDAHULUAN

Produk yang berkualitas mempunyai daya tarik yang lebih tinggi bagi konsumen. Menurut Prawirosentono (2007), konsumen yang membeli produk berorientasi pada kualitas, pada umumnya mempunyai loyalitas produk yang besar dibandingkan dengan konsumen yang membeli produk berdasarkan orientasi harga, sehingga mereka akan selalu membeli produk tersebut (*repurchase*). Dari segi produsen, cara (*methods*) produksi menghasilkan produk yang berkualitas berbanding lurus dengan peningkatan produktivitas, antara lain mengurangi penggunaan barang dan mengurangi biaya. Dalam menjual barang yang berkualitas rendah, ada kemungkinan produsen akan banyak menerima keluhan dan pengembalian barang dari konsumen, atau biaya memperbaiki (*after sales service*) menjadi sangat besar, selain itu dapat mempengaruhi reputasi perusahaan bahkan tuntutan ganti rugi kecelakaan akibat pemakaian produk tersebut. Proses produksi merupakan kombinasi mesin-mesin, orang-orang, dan bahan baku, sehingga memungkinkan terjadinya kekeliruan sehingga produk yang dihasilkan mengalami variasi. Menurut Montgomery (1990), peranan statistik adalah untuk mencegah dan mengurangi terjadinya variasi tersebut. Salah satu alat kendali mutu statistik adalah grafik pengendali. Metode Bayesian subyektif dapat digunakan untuk

melakukan estimasi titik. Dalam makalah ini akan dijelaskan bagaimana proses penggunaan metode Bayesian subyektif dalam pengkonstruksian grafik pengendali-*p* oleh karena itu dengan mudah dapat diidentifikasi sampel-sampel yang *out of control* dan apakah proses tersebut terkendali atau tidak.

DASAR TEORI

Pengendalian kualitas merupakan upaya untuk mencapai dan mempertahankan standar yang direncanakan. Salah satu teknik dan alat pengendalian kualitas adalah grafik pengendali (*control chart*) yang dikemukakan oleh Dr. Shewhart untuk mengetahui apakah sampel hasil observasi termasuk daerah yang diterima (*accepted area*) atau daerah ditolak (*rejected area*) seperti pada Gambar 1. Dalam statistik, untuk memperoleh tingkat kepercayaan sebesar 99,73%, digunakan batas toleransi sebesar 3 kali deviasi standar (*standart deviation*).



Keterangan
 SD = deviasi standar
 n = 0, 1, 2, atau 3

Gambar 1. Diagram Shewhart

Grafik Pengendali-p Klasik

Dalam makalah ini akan digunakan grafik pengendali untuk bagian tidak sesuai (*nonconformance quality*) atau yang sering disebut grafik pengendali-*p* (*p-chart*). Asas-asas statistik yang melandasi grafik pengendali untuk bagian tak sesuai didasarkan atas distribusi Binomial dengan parameter *n* dan *p* (Montgomery, 1990). Rumusan untuk membuat grafik pengendali bagian tidak sesuai yang masih merujuk pada diagram Shewhart dijelaskan oleh Dr. Kaoru Ishikawa sebagai berikut

$$p_i = \frac{D_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dengan

- p* : proporsi kerusakan,
- D* : jumlah produk yang tidak sesuai,
- n* : jumlah sampel.

Disamping itu, dihitung

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m p_i}{m},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}},$$

dengan

\bar{p} : rata-rata proporsi kerusakan,
 σ : deviasi standar proporsi kerusakan,
 sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Centerline} \quad \quad \quad CL &= \bar{p}, \\ \text{Lower Control Limit} \quad LCL &= \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}, \\ \text{Upper Control Limit} \quad UCL &= \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}, \end{aligned}$$

yang kemudian akan digunakan untuk batas pengendali dalam melukiskan grafik pengendali- p (Prawirosentono, 2007).

Grafik Pengendali- p dengan Metode Bayesian Subyektif

Selanjutnya dihitung estimasi titik dalam hal ini *upper control limit*, *centerline*, dan *lower control limit* dengan menggunakan metode Bayesian subyektif. Misalkan $Y = y_1, y_2, \dots, y_m$ adalah banyaknya kejadian dalam m percobaan, n sampel, dan θ adalah probabilitas kejadian. Variabel banyaknya barang yang *defect* setiap mengambil sampel ukuran n yaitu X_i dapat dipandang berdistribusi $X_i \sim \text{Binomial}(1, \theta)$ atau $X_i \sim \text{Bernouli}(p)$ dengan $\theta \in \Omega = (0,1)$, sehingga fungsi probabilitasnya

$$f(x_i; \theta) = \theta^{x_i}(1 - \theta)^{1-x_i}, \tag{1}$$

dan fungsi *likelihood* adalah

$$\begin{aligned} L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \theta^{x_i}(1 - \theta)^{1-x_i} \\ &= \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \\ L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) &= \theta^r (1 - \theta)^{n-r} \end{aligned} \tag{2}$$

dengan $\sum_{i=1}^n x_i = r$.

Distribusi Beta merupakan keluarga konjugat distribusi Binomial, sehingga fungsi kepadatan probabilitas priornya berdistribusi $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ dengan fungsi densitas

$$\pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1}(1 - \theta)^{\beta-1} \tag{3}$$

untuk $0 < \theta < 1$, (Carlin dan Thomas, 1996).

Distribusi $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ memiliki beberapa bentuk berdasarkan parameter α dan β yang dipilih, sehingga parameter prior yang dipilih seharusnya mempresentasikan penilaian subjektif peneliti. Salah satu metodenya adalah memilih $\text{Beta}(1,1)$ atau priornya berdistribusi seragam pada $(0,1)$. Di samping itu, dapat pula dipilih $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ yang cocok dengan keyakinan prior berdasarkan *mean* dan deviasi standarnya, digunakan $\alpha = \frac{r(n-1)}{n}$ dan $\beta = \frac{(n-r)(n-1)}{n}$ sebagai parameter Beta tersebut (Sisca, 2011). Oleh karena itu diperoleh estimator Bayes untuk θ yang sama dengan rata-rata proporsi kerusakan pada grafik pengendali- p klasik.

Distribusi posterior dihitung dengan mengalikan distribusi prior dengan fungsi *likelihood*

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= \pi(\theta) \cdot L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \cdot \theta^r(1-\theta)^{n-r}, \\ &\propto \theta^{r+\alpha-1}(1-\theta)^{n-r\beta-1}, \\ \pi(\theta|x) &= \text{Beta}(r + \alpha, n - r + \beta), \end{aligned} \tag{4}$$

estimator Bayes untuk θ jika dinyatakan sebagai

$$\hat{\theta} = \frac{r + \alpha}{\alpha + \beta + n},$$

(Carlin dan Thomas, 1996).

Berdasarkan estimator Bayes dapat digunakan sebagai *CL* sehingga

$$CL = \frac{r + \alpha}{\alpha + \beta + n}. \tag{5}$$

Batas *LCL* dan *UCL* dihitung sehingga

$$\int_{LCL}^{UCL} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{r+\alpha-1}(1-\theta)^{n-r+\beta-1} d\theta = 1 - \delta, \tag{6}$$

dan dipilih jarak minimum antara *LCL* dan *UCL* dengan tingkat signifikansi δ .

METODE PENELITIAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder proses produksi pengolahan ayam selama bulan Juni-September 2012 yang diambil dari PT.”X”. Proses produksi pengolahan ayam tersebut dilakukan setiap hari. Dalam hal ini diperoleh ukuran sampelnya $n = 100$.

Kebijaksanaan pengendalian kualitas yang dilakukan pada pabrik ayam potong dapat digolongkan dalam dua kategori, yaitu rusak (*defect*) dan baik. Ayam yang digolongkan *defect* adalah

- Sayap merah-kebiruan,
- Penyakit arthritis,
- Sayap patah,
- Kaki patah,
- Kaki memar.
- Penyakit kulit (bisul dan jamur),
- Dada memar,
- Kulit merah tua keriput,
- Pertumbuhan tak normal,
- Organ dalam tak normal,
- Luka parut,
- Kulit sobek,
- Over scalding,
- Terpotong,
- Empedu pecah.

Ayam yang tidak mengalami hal-hal tersebut digolongkan dalam kategori baik.

Hal yang pertama dilakukan dalam penelitian ini adalah melukiskan grafik pengendali-*p* klasik. Kemudian dilukiskan pula grafik pengendali-*p* dengan menggunakan metode Bayesian subyektif dengan priornya Beta(1,1) berdistribusi seragam pada (0,1) dan dengan priornya Beta(α, β) berdasarkan *mean* dan deviasi standarnya. Dengan demikian dapat diidentifikasi sampel-sampel mana yang *out of control* dan apakah proses tersebut terkendali atau tidak.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dilakukan pengambilan sampel sebanyak $m = 96$ dengan ukuran $n = 100$, diperoleh data seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Tabel banyaknya ayam *defect* dalam sampel ukuran $n = 100$

No. Sampel	Banyaknya ayam <i>defect</i>	Proporsi sampel	No. Sampel	Banyaknya ayam <i>defect</i>	Proporsi sampel
1	34	0,34	49	31	0,31
2	32	0,32	50	32	0,32
3	33	0,33	51	31	0,31
4	33	0,33	52	31	0,31
5	39	0,39	53	30	0,30
6	25	0,25	54	30	0,30
7	34	0,34	55	32	0,32
8	25	0,25	56	27	0,27
9	32	0,32	57	28	0,28
10	32	0,32	58	28	0,28
11	33	0,33	59	27	0,27
12	30	0,30	60	27	0,27
13	30	0,30	61	29	0,29
14	30	0,30	62	30	0,30
15	35	0,35	63	32	0,32
16	32	0,32	64	38	0,38
17	32	0,32	65	35	0,35
18	32	0,32	66	36	0,36
19	33	0,33	67	27	0,27
20	31	0,31	68	30	0,30
21	33	0,33	69	26	0,26
22	29	0,29	70	37	0,37
23	29	0,29	71	20	0,20
24	28	0,28	72	40	0,40
25	29	0,29	73	31	0,31
26	31	0,31	74	35	0,35
27	31	0,31	75	29	0,29
28	29	0,29	76	33	0,33
29	34	0,34	77	33	0,33
30	32	0,32	78	28	0,28
31	31	0,31	79	28	0,28
32	29	0,29	80	32	0,32
33	28	0,28	81	31	0,31
34	29	0,29	82	30	0,30
35	30	0,30	83	30	0,30
36	29	0,29	84	27	0,27
37	30	0,30	85	32	0,32
38	30	0,30	86	29	0,29
39	31	0,31	87	33	0,33
40	31	0,31	88	29	0,29
41	29	0,29	89	30	0,30
42	29	0,29	90	28	0,28
43	32	0,32	91	34	0,34
44	30	0,30	92	31	0,31
45	29	0,29	93	27	0,27
46	28	0,28	94	33	0,33
47	28	0,28	95	26	0,26
48	31	0,31	96	29	0,29

Grafik Pengendali-p Klasik

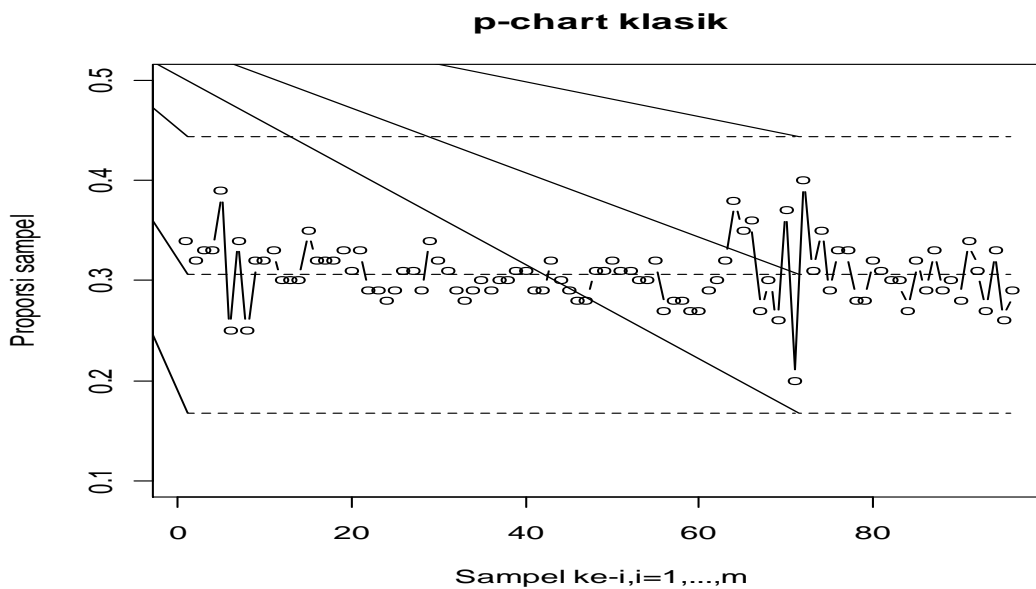
Berdasarkan data pada Tabel 1, dapat diperoleh

$$\text{Centerline} \quad CL = \bar{p} = 0,3060,$$

$$\text{Lower Control Limit} \quad LCL = \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}} = 0,1678,$$

$$\text{Upper Control Limit} \quad UCL = \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}} = 0,4443.$$

Dengan demikian diperoleh grafik pengendali-p klasik pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik pengendali-p klasik

Dalam hal ini *LCL* yang diperoleh tidak negatif, sehingga terbentuk batas-batas grafik pengendali-p yang simetris. Namun apabila *LCL* yang diperoleh negatif, maka diberlakukan $LCL = 0$ sehingga batas-batas grafik pengendali-p menjadi tidak simetris. Dalam Gambar 2, dapat dilihat bahwa semua sampel berada dalam daerah penerimaan (*accepted area*), ini disebut perilaku normal.

Grafik Pengendali-p dengan Metode Bayesian Subyektif

Dari data pada Tabel 1, diketahui $Y = y_1, y_2, \dots, y_m$ adalah banyaknya ayam yang *defect* dalam m percobaan, ukuran sampel n , dan θ adalah probabilitas banyaknya ayam yang *defect*. Variabel banyaknya ayam *defect* setiap mengambil sampel ukuran n yaitu $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ dengan $X_i \sim \text{Binomial}(1, \theta)$ dengan $\theta \in \Omega = (0,1)$ maka fungsi probabilitasnya seperti persamaan (1) dan fungsi *likelihood* seperti persamaan (2).

Dari data pada Tabel 1, diperoleh

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^m y_i} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m}$$

$$= 30,6042.$$

Fungsi kepadatan probabilitas prior dari θ berdistribusi $Beta(\alpha, \beta)$ dengan fungsi densitas seperti persamaan (3).

Secara subyektif dipilih $\alpha = 1$ dan $\beta = 1$, dari persamaan (4) diperoleh distribusi posterior

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= Beta(r + \alpha, n - r + \beta) \\ &= Beta(30,6042 + 1; 100 - 30,6042 + 1) \\ &= Beta(31,6042; 70,3958). \end{aligned}$$

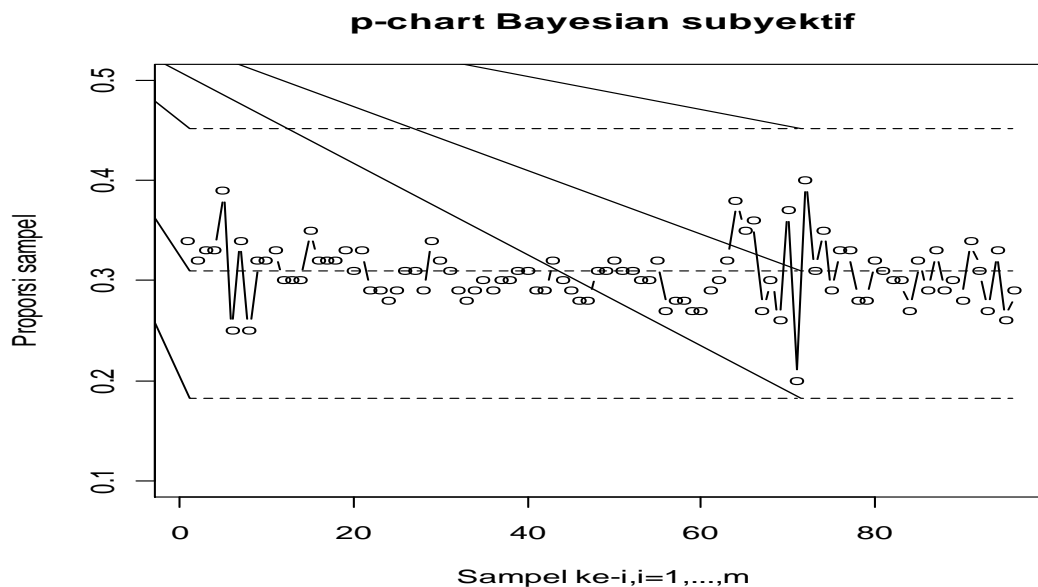
Dengan menggunakan persamaan (6) dihitung Estimator Bayes untuk θ yaitu

$$\begin{aligned} CL &= \frac{r + \alpha}{\alpha + \beta + n} \\ &= \frac{30,6042 + 1}{1 + 1 + 100} \\ &= 0,3098. \end{aligned}$$

Dengan $\delta = 0,0027$, LCL dan UCL ditentukan sehingga

$$\int_{LCL}^{UCL} Beta(31,6042; 70,3958)d\theta = 99,73\%,$$

dan dipilih jarak minimum antara LCL dan UCL dengan tingkat signifikansi δ . Dengan menggunakan program R diperoleh $LCL = 0,1827$ dan $UCL = 0,4518$. Selanjutnya dilukiskan grafik pengendali- p berdasarkan batas tersebut seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Grafik pengendali- p dengan prior $Beta(1,1)$

Berdasarkan persamaan *mean* dan deviasi standarnya digunakan

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{r(n-1)}{n} \\ &= \frac{30,6042(100-1)}{100} \\ &= 30,2981, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(n-r)(n-1)}{n} \\ &= \frac{(100-30,6042)(100-1)}{100} \\ &= 68,7019, \end{aligned}$$

dan dengan persamaan (4) diperoleh distribusi posterior

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x) &= \text{Beta}(r + \alpha, n - r + \beta) \\ &= \text{Beta}(60,9023; 138,0977). \end{aligned}$$

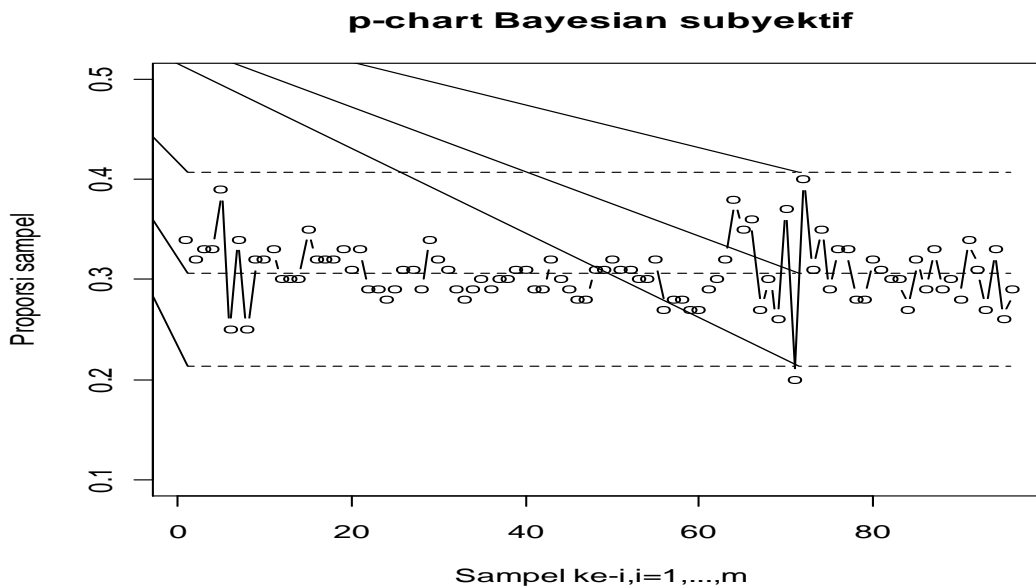
Untuk menentukan estimator Bayes digunakan persamaan (5) seperti berikut

$$\begin{aligned} CL &= \frac{r + \alpha}{\alpha + \beta + n} \\ &= 0,306, \end{aligned}$$

dengan menggunakan $\delta = 0,0027$, LCL dan UCL ditentukan sehingga

$$\int_{LCL}^{UCL} \text{Beta}(60,9023; 138,0977)d\theta = 99,73\%$$

dan dipilih jarak minimum antara LCL dan UCL dengan tingkat signifikansi δ . Dengan menggunakan program R diperoleh $LCL = 0,2129$ dan $UCL = 0,406$. Selanjutnya dilukiskan grafik pengendali- p berdasarkan batas tersebut seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Grafik pengendali- p dengan prior Beta(30,2981; 68,7019)

Berdasarkan grafik pengendali- p yang terbentuk terlihat bahwa batas pengendalinya tidak simetris, namun CL , LCL , dan UCL akan selalu terletak pada interval $(0,1)$. Metode Bayes memberikan hasil estimasi yang lebih baik karena estimasi parameternya menggunakan informasi data sampel dan juga sebaran prior untuk mendapatkan sebaran posterior.

SIMPULAN DAN SARAN

Dalam pembahasan di atas, telah dijelaskan penggunaan metode Bayesian subyektif dalam pengkonstruksian grafik pengendali- p . Sampel yang digunakan berdistribusi

Binomial, sedangkan priornya berdistribusi $Beta(\alpha, \beta)$ yang merupakan keluarga konjugat distribusi Binomial. Dalam makalah ini dipilih secara subyektif distribusi priornya $Beta(1,1)$ dan $Beta(30,2981; 68,7019)$. Distribusi posterior dibentuk dari distribusi sampel dan distribusi prior. Grafik pengendali- p klasik ada kemungkinan LCL yang diperoleh negatif oleh karena itu perlu dilakukan perbaikan $LCL = 0$ sehingga batas-batasnya menjadi tidak simetris. Batas grafik pengendali- p yang dikonstruksikan pasti terletak antara 0 dan 1 sehingga berbeda dengan grafik pengendali- p klasik. Dari grafik pengendali- p klasik dan grafik pengendali- p dengan prior $Beta(1,1)$ tidak ada sampel yang *out of control*, namun dari grafik pengendali- p dengan prior $Beta(30,2981; 68,7019)$ terdapat 1 sampel yang *out of control* yaitu sampel ke 71. Untuk itu perlu diperiksa penyebabnya lalu diambil tindakan perbaikan.

DAFTAR PUSTAKA

- Carlin, B.P. dan Thomas, A.L. 1996. *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis*, 2nd Edition, Chapman and Hall, London.
- Montgomery, D.C. 1990. *Pengantar Pengendalian Kualitas Statistik*. Alih bahasa: Zanzawi Soejoeti. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Prawirosentono, S. 2007. *Filosofi Baru Tentang Manajemen Mutu Terpadu Abad 21*, Edisi Kedua. Jakarta : Bumi Aksara.
- Setiawan, A. 2012. Penggunaan Metode Bayesian Obyektif dalam Pembuatan Grafik Pengendali p -chart. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA*, UNY Yogyakarta
- Sisca, A. C. 2011. Skripsi. *Inferensi Statistik Distribusi Binomial dengan Metode Bayes Menggunakan Konjugat Prior*. Program Studi Statistika Jurusan matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro; Semarang