

KONTROL OPTIMAL VAKSINASI MODEL EPIDEMIOLOGI TIPE SIR

Jonner Nainggolan¹, Sudradjat Supian², Asep K. Supriatna³, dan Nursanti Anggriani⁴

^{2,3,4}Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran Bandung

¹Jurusan Matematika FMIPA Universitas Cenderawasih Jayapura

jonn_cesil@yahoo.co.id

Abstrak

Paper ini mengkaji kontrol optimal vaksinasi dari model epidemiologi tipe *SIR* dengan adanya reinfeksi, dimana *S* adalah individu kompartemen *susceptible*, *I* adalah individu kompartemen *infected*, dan *R* adalah individu kompartemen *recovered*. Kontrol optimal vaksinasi dilakukan untuk mengetahui efektifitas vaksin pada pencegahan penyebaran suatu penyakit menular. Pada model ini juga ditentukan angka reproduksi dasar, titik ekuilibrium endemik dan nonendemik. Selanjutnya diberikan perhitungan numerik dengan menggunakan program Matlab untuk ilustrasi pengaruh kontrol vaksinasi terhadap kompartemen terinfeksi.

Kata kunci: Kontrol optimal, vaksinasi, tipe *SIR*, titik ekuilibrium, angka reproduksi dasar.

1. Pendahuluan

Penyebaran suatu penyakit akibat suatu virus atau bakteri yang masuk ke dalam tubuh akan mengakibatkan gangguan kesehatan manusia dan akan mempengaruhi perkembangan sosial ekonomi masyarakat. Upaya eliminasi suatu penyakit yang menyebar dapat berhasil secara optimal apabila tercapai beberapa tahapan penelitian, penerapan metode baru, pengembangan berbagai alat diagnostik, obat dan vaksin baru (Aditama dkk., 2011).

Penelitian model penyebaran penyakit tipe *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) klasik telah dikaji oleh Kermak & McKendrick (1927). Selanjutnya Hethcote (2000) mengembangkan model dari tipe *SIR* klasik dengan memperhatikan kompartemen *exposed*, Brauer and Castillo-Chavez (2000) mengembangkan model *SIR* dengan memperhatikan struktur umur.

Dalam upaya pengendalian suatu penyakit yang mewabah dapat dilakukan tindakan melalui vaksinasi. Model vaksinasi telah dikemukakan oleh beberapa peneliti

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema " *Kontribusi Pendidikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa*" pada tanggal 10 November 2012 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

antara lain: Model vaksinasi tipe *SVI* yang telah dikembangkan oleh Kribs-Zaleta dan Velasco-Hernandez (2000), Brauer and Castillo-Chavez (2000), dimana V adalah kompartemen vaksinasi. Suatu alat ukur standar untuk mengetahui efektifitas vaksinasi pada pengendalian suatu penyakit dapat dilihat dari angka reproduksi dasar. Pada model penyebaran suatu penyakit keadaan bebas penyakit stabil secara lokal jika angka reproduksi dasar lebih kecil dari satu, dan jika angka reproduksi dasar lebih besar dari satu maka penyakit akan menyebar (Castillo-Chavez dkk., 2002; Driessche dan Watmough, 2002).

Untuk mengoptimalkan pengendalian penyebaran suatu penyakit perlu dikaji model optimisasi (Agusto, 2009; Goldmann dan Lightwood, 2002; Jung dkk., 2009; Neilan dan Lenhart, 2010). Optimisasi pada sistem dinamik pada umumnya menggunakan kontrol optimal (Naidu, 2002; Tu, P.N.V., 1994), dimana penyelesaian masalah kontrol optimal yang terkenal dan banyak digunakan adalah dengan pendekatan Prinsip Maksimum Pontryagin. Pengendalian penyebaran suatu penyakit tipe *SIR* dengan faktor vaksinasi, tanpa memperhatikan laju reinfeksi dari kompartemen R ke I dikaji dengan menggunakan kontrol optimal (Zaman, 2008; Yusuf dan Benyah, 2012). Model yang dikaji dalam paper ini adalah model kontrol optimal vaksinasi pada epidemiologi tipe *SIR* dengan memperhatikan laju reinfeksi dari kompartemen R ke I , kasus ini perlu dikaji karena ada beberapa penyebaran penyakit mempunyai fase reinfeksi (Singer dan Kirschner, 2004). Pada paper ini dikaji titik ekuilibrium endemik, nonendemik, dan angka reproduksi dasar. Selanjutnya dibahas karakterisasi model kontrol untuk menentukan variabel *co-state (adjoint)*, kontrol optimal dari model, dan perhitungan numerik untuk mengetahui pengaruh kontrol vaksinasi terhadap kompartemen *infected* dengan menggunakan program Matlab.

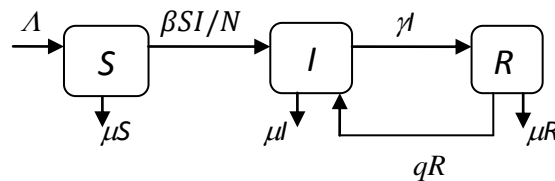
Organisasi dalam tulisan ini adalah bagian satu pendahuluan, bagian dua model epidemiologi tipe *SIR*, bagian tiga membahas kontrol optimal vaksinasi, bagian keempat perhitungan numerik, kesimpulan dan saran, dan terakhir ucapan trimakasih.

2. Model Epidemiologi tipe *SIR*

Populasi pada model vaksinasi tipe *SIR* dibagi dalam tiga kompartemen yaitu: kompartemen *susceptible (S)* adalah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi penyakit, kompartemen *infected (I)* adalah individu yang terinfeksi dan dapat

menularkan ke individu kompartemen yang lain, dan kompartemen *recovered* (*R*) adalah individu yang telah kebal terhadap penyakit.

Model vaksinasi tipe *SIR* yang dikaji dalam tulisan ini merupakan pengembangan dari model epidemik tipe *SIR* (Kermack dan McKendrick, 1927) dengan memperhatikan laju reinfeksi dari kompartemen *recovered*, selanjutnya dikaji model kontrol optimal. Misalkan laju rekrutmen adalah Λ dan kematian alamiah masing-masing kompartemen adalah μ , sedangkan laju transmisi terinfeksi individu dari kompartemen *S* ke *I* sebesar β , laju *recovered* dari kompartemen *I* ke *R* sebesar γ , dan laju reinfeksi dari kompartemen *R* ke *I* sebesar q . Diagram skematik model *SIR* yang dikaji seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram skematik tipe *SIR*

Jumlah populasi pada waktu t adalah $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Adapun asumsi dari model epidemik tipe *SIR* yang dikaji sama seperti pada (Zaman dkk., 2008) dengan tambahan:

- 1) Individu rekrutmen masuk ke kompartemen *S*
- 2) Memperhatikan reinfeksi dari kompartemen *R*.

Berdasarkan diagram skematik seperti pada Gambar 1, asumsi model dan variabel-variabel yang ada kemudian dibangun model matematika yang dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - \mu S(t), \quad S(0) = S_0 > 0 \tag{1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (\gamma + \mu)I(t) + qR(t), \quad I(0) = I_0 > 0 \tag{2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - (q + \mu)R(t), \quad R(0) = R_0 > 0, \tag{3}$$

dimana parameter-parameter $\Lambda, \beta, \gamma, \mu, q > 0$.

Analisis Model

Pada analisis model ditentukan angka reproduksi dasar (R_0) dari persamaan (1)–(3). Penentuan R_0 dari model diperoleh dengan menggunakan *Next Generation Matrix* (Driessche dan Watmough, 2002) yaitu:

$$R_0 = \frac{\beta(q+\mu)}{\mu(\gamma+q+\mu)}. \tag{4}$$

Angka reproduksi dasar R_0 bergantung pada laju transmisi, laju *recovered*, laju reinfeksi dan laju kematian alamiah.

Titik Ekuilibrium

Model pada persamaan (1)-(3) mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium nonendemik dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium nonendemik jika tidak ada individu yang terinfeksi (I), sehingga laju kompartemen *infected* persatuan waktu adalah nol (Perko,1991). Titik ekuilibrium nonendemik dari persamaan (1)-(3) adalah

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right). \tag{5}$$

Sedangkan titik ekuilibrium endemik dari model persamaan (1)-(3), yaitu solusi dari ruas kanan persamaan (1)-(3) sama dengan nol:

$$E_1 = \left(\frac{\Lambda}{\mu R_0}, \frac{\Lambda}{\beta}(R_0 - 1), \frac{\gamma\Lambda}{\beta(q+\mu)}(R_0 - 1)\right). \tag{6}$$

Berikut diberikan teorema titik ekuilibrium.

Teorema 1

Titik ekuilibrium nonendemik E_0 bersifat stabil secara lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Bukti:

Pelinearan matriks Jacobian model (1)-(3) di titik ekuilibrium E_0 . Matriks Jacobi J_{E_0} pada titik nonendemik adalah

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - (\gamma + \mu) & q \\ 0 & \gamma & -(q + \mu) \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari dari matriks Jacobi J_{E_0} adalah

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -\frac{1}{2}(q + 2\mu - \beta + \gamma) + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + (q + \gamma)^2 + 2\beta(q - \gamma)},$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}(q + 2\mu - \beta + \gamma) - \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + (q + \gamma)^2 + 2\beta(q - \gamma)}.$$

Titik ekuilibrium nonendemik E_0 stabil secara lokal jika semua nilai eigen dari $\text{Det}(J_{E_0} - \lambda) = 0$ bernilai real negatif (Perko, 1991; Brauer and Castillo-Chavez, 2002; Bhunu dkk., 2008). Nilai $\lambda_1 = -\mu < 0$, agar nilai λ_2 dan λ_3 bernilai negatif maka haruslah $(q + 2\mu - \beta + \gamma) > \sqrt{\beta^2 + (q + \gamma)^2 + 2\beta(q - \gamma)}$ yang ekuivalen dengan

$$\frac{\beta(q+\mu)}{\mu(\gamma+q+\mu)} = R_0 < 1. \text{ Sebaliknya nilai eigen dari } \text{Det}(J_{E_0} - \lambda) = 0 \text{ terdapat salah satu}$$

yang bernilai real positif jika $R_0 > 1$. □

Teorema 2

Titik ekuilibrium endemik E_1 bersifat stabil secara lokal jika $R_0 > 1$ dan tidak stabil jika $R_0 < 1$.

Bukti:

Pelinearan matriks Jacobian model (1)-(3) di titik ekuilibrium E_1 . Matriks Jacobi J_{E_1} ekuilibrium endemik adalah

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -\mu R_0 & -\frac{\beta}{R_0} & 0 \\ \mu(R_0 - 1) & \frac{\beta}{R_0} - (\gamma + \mu) & q \\ 0 & \gamma & -(q + \mu) \end{bmatrix},$$

Nilai eigen dari dari matriks Jacobi J_{E_1} adalah

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = \frac{1}{2R_0}(-R_0(\gamma + q + \mu + \mu R_0) - \beta) + \frac{1}{2R_0}(2\beta R_0(\mu - \gamma + q) + R_0^2((q + \mu)^2 + 2\gamma(q + \mu) + \gamma^2 - 2\beta\mu) - 2\mu R_0^3(\mu + \gamma + q) + \mu^2 R_0^4),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2R_0}(-R_0(\gamma + q + \mu + \mu R_0) + \beta) - \frac{1}{2R_0}(2\beta R_0(\mu - \gamma + q) + R_0^2((q + \mu)^2 + 2\gamma(q + \mu) + \gamma^2 - 2\beta\mu) - 2\mu R_0^3(\mu + \gamma + q) + \mu^2 R_0^4).$$

Titik ekuilibrium endemik E_1 stabil secara lokal jika semua nilai eigen dari $\text{Det}(J_{E_1} - \lambda) = 0$ bernilai real negatif (Perko, 1991; Brauer and Castillo-Chavez, 2000; Bhunu dkk., 2008). Nilai $\lambda_1 = -\mu < 0$, agar nilai λ_2 dan λ_3 bernilai negatif maka haruslah $R_0(\gamma + q + \mu + \mu R_0) - \beta > 2\beta R_0(\mu - \gamma + q) + R_0^2((q + \mu)^2 + 2\gamma(q + \mu) + \gamma^2 - 2\beta\mu) - 2\mu R_0^3(\mu + \gamma + q) + \mu^2 R_0^4$ yang ekuivalen dengan $\frac{\beta(q+\mu)}{\mu(\gamma+q+\mu)} = R_0 > 1$. Sebaliknya nilai eigen dari $\text{Det}(J_{E_1} - \lambda) = 0$ terdapat salah satu yang bernilai real positif jika $R_0 < 1$. □

3. Kontrol Optimal Vaksinasi

Pada persamaan (1)–(3) diberikan variabel kontrol $U = \{u \mid u(t) \text{ terbatas dan terukur (Agusto, 2009), } 0 \leq a \leq u(t) \leq b \leq I, t \in [0, T]\}$, dimana $u(t)$ adalah kontrol efektifitas vaksinasi per unit waktu. Persamaan epidemiologi tipe *SIR* setelah diberikan kontrol efektifitas vaksin ($u(t)$) pada individu kompartemen *susceptible*, persamaan (1)–(3) menjadi

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (u(t) + \mu)S(t), S(0) = S_0 > 0 \tag{7}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (\gamma + \mu)I(t) + qR(t), I(0) = I_0 > 0 \tag{8}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = u(t)S(t) + \gamma I(t) - (q + \mu)R(t), R(0) = R_0 > 0 \tag{9}$$

Berdasarkan persamaan (7)–(9) dengan menggunakan operator *Next Generation Matrix* (Driessche dan Watmough, 2002) angka reproduksi vaksinasi (R_u) adalah

$$R_u = \frac{\beta(q+\mu)}{(u+\mu)(\gamma+q+\mu)} = \frac{\mu}{u+\mu} R_0. \tag{10}$$

Akibatnya $R_u \leq R_0$.

Fungsional objektif pada model kontrol optimal epidemiologi tipe *SIR* dengan reinfeksi adalah

$$\min J(u) = \int_0^T B_1 S(t) + B_2 I(t) + C u^2(t) dt. \tag{11}$$

dimana B_1 adalah bilangan positif sebagai bobot jumlah individu kompartemen *susceptible*, B_2 adalah bilangan positif sebagai bobot jumlah individu kompartemen *infected*, C adalah suatu bobot parameter yang bersesuaian dengan kontrol $u(t)$ dan T adalah waktu akhir periode.

Langkah pertama model kontrol optimal yang dikaji dalam paper ini, yaitu mencari persamaan Lagrangian dan Hamilton dari masalah kontrol optimal. Persamaan Lagrangian masalah kontrol optimal yaitu:

$$L(I, u) = B_1 S(t) + B_2 I(t) + C u^2(t). \tag{12}$$

Prinsip maksimum dari model kontrol optimal vaksinasi pengendalian suatu penyakit, dibentuk fungsional objektif atau integral indeks *performance* untuk meminimumkan persamaan Hamilton H dari persamaan (7)–(9) dan persamaan (12) yaitu:

$$H(S, I, R, u, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t) = B_1 S(t) + B_2 I(t) + C u^2(t) + \lambda_1 \frac{dS(t)}{dt} + \lambda_2 \frac{dI(t)}{dt} + \lambda_3 \frac{dR(t)}{dt}. \tag{13}$$

Sebelum menentukan solusi model kontrol optimal, lebih dahulu dikarakterisasi model kontrol optimal seperti yang dinyatakan dalam Teorema 3 berikut:

Teorema 3

Misalkan $S^*(t)$, $I^*(t)$, $R^*(t)$ adalah penyelesaian yang bersesuaian dengan sistem persamaan (7)-(9) dan kontrol optimum $u^*(t)$ maka terdapat variabel-variabel adjoint $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ yang memenuhi:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -B_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\beta I^*(t)}{N} + (\lambda_1 - \lambda_3)u^*(t) + \lambda_1\mu \tag{14}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -B_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\beta S^*(t)}{N} + (\lambda_2 - \lambda_3)\gamma + \lambda_2\mu \tag{15}$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = (\lambda_3 - \lambda_2)q + \lambda_3\mu. \tag{16}$$

dengan syarat batas (transversality)

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0, \tag{17}$$

dan kontrol optimum $u^*(t)$, yaitu

$$u^*(t) = \min \left\{ b, \max \left\{ a, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2c} \right\} \right\}. \tag{18}$$

Bukti:

Untuk menentukan persamaan *adjoint* dan syarat batas, digunakan persamaan Hamiltonian persamaan (13). Dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin, diperoleh persamaan *adjoint* berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S}, \text{ dengan } \lambda_1(T) = 0 \\ &= -B_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\beta I^*(t)}{N} + (\lambda_1 - \lambda_3)u^*(t) + \lambda_1\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I}, \text{ dengan } \lambda_2(T) = 0 \\ &= -B_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\beta S^*(t)}{N} + (\lambda_2 - \lambda_3)\gamma + \lambda_2\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R}, \text{ dengan } \lambda_3(T) = 0 \\ &= (\lambda_3 - \lambda_2)q + \lambda_3\mu. \end{aligned}$$

Kondisi optimalisasi bentuk Hamiltonian terhadap kontrol optimal

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2Cu^*(t) - \lambda_1 S^*(t) + \lambda_3 S^*(t) = 0,$$

Sehingga diperoleh $u^*(t) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2c}$

Dengan menggunakan sifat ruang kontrol diperoleh

$$u^*(t) = \begin{cases} a, & \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2C} \leq a \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2C}, & a < \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2C} < b \\ b, & \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2C} \geq b \end{cases}$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk

$$u^*(t) = \min \left\{ b, \max \left\{ a, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2C} \right\} \right\}. \quad \square$$

Kontrol optimum dan *state* dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan *state* (7)-(9) dan kontrol persamaan (18) sesuai sistem *adjoint* dan syarat ektrim *adjoint* (14)-(16). Untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal digunakan kondisi awal, kondisi *transversality* secara bersama-sama dengan karakterisasi kontrol $u^*(t)$.

Turunan kedua terhadap $u(t)$ bentuk Hamiltonian persamaan (13) adalah positif berarti jenis kontrol $u^*(t)$ adalah minimum. Jika $u^*(t)$ disubstitusi pada persamaan *state* (7)-(9) maka diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \frac{\beta S^*(t)I^*(t)}{N} - \left(\min \left\{ b, \max \left\{ a, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2C} \right\} \right\} + \mu \right) S^*(t), \quad (19)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{N} - (\gamma + \mu)I(t) + qR(t), \quad (20)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \min \left\{ b, \max \left\{ a, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2C} \right\} \right\} S(t) + \gamma I(t) - (q + \mu)R(t), R(0) = R_0 > 0. \quad (21)$$

Sehingga $S^*(t)$, $I^*(t)$, $R^*(t)$ adalah solusi optimal persamaan (7)-(9) yang dapat diperoleh secara numerik. Sedangkan jika $u^*(t)$ disubstitusi pada persamaan *adjoint* (14)-(16) maka persamaan *adjoint* menjadi sebagai berikut:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -B_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\beta I^*(t)}{N} + (\lambda_1 - \lambda_3) \min \left\{ b, \max \left\{ a, \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)S^*(t)}{2C} \right\} \right\} + \lambda_1 \mu \quad (22)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -B_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\beta S^*(t)}{N} + (\lambda_2 - \lambda_3)\gamma + \lambda_2 \mu \quad (23)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = (\lambda_3 - \lambda_2)q + \lambda_3 \mu. \quad (24)$$

Sehingga $\lambda_1^*(t)$, $\lambda_2^*(t)$, dan $\lambda_3^*(t)$ adalah solusi optimal fungsi *adjoint* persamaan (14)-(16) yang dapat diperoleh secara numerik.

4. Perhitungan Numerik

Langkah pertama penyelesaian kontrol optimal vaksinasi suatu penyakit dengan memasukkan tebakan awal pada kontrol vaksinasi $u^*(t)$. Kemudian mensubstitusikan tebakan awal nilai kontrol pada variabel *state*. Selanjutnya nilai kontrol dan nilai variabel *state* disubstitusi ke variabel *adjoint* dengan kondisi *transversality*. Nilai

variabel *state* dan *adjoint* disubstitusi kembali ke variabel kontrol, sehingga diperoleh nilai variabel kontrol pertama.

Proses ini dilanjutkan sampai diperoleh nilai variabel *state*, *adjoint*, dan kontrol yang konvergen, jika nilai variabel *state*, *adjoint*, dan kontrol sudah konvergen berarti diperoleh solusi variabel *state*, *adjoint*, dan kontrol yang stabil. Simulasi persamaan *state* dan *adjoint* diselesaikan dengan menggunakan program Matlab. Adapun parameter dan nilai awal yang digunakan perhitungan numerik seperti pada Tabel 1 dan Tabel 2 berikut.

Tabel 1: Nilai dan Deskripsi Parameter

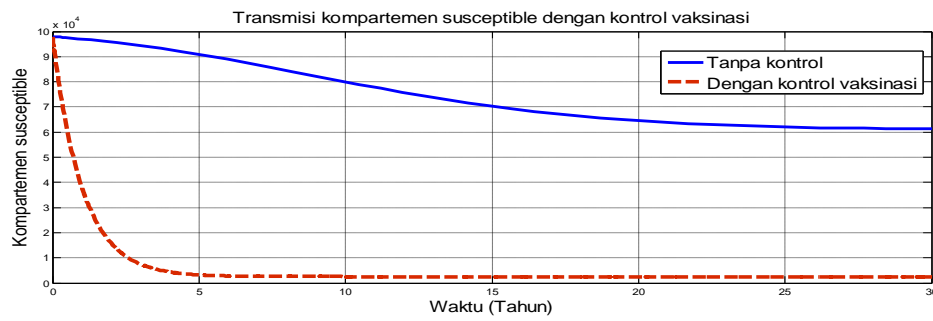
Parameter	Nilai
Λ	2500
μ	0,02
β	0,75
γ	0,56
q	0,01

Tabel 2: Parameter Komputasi

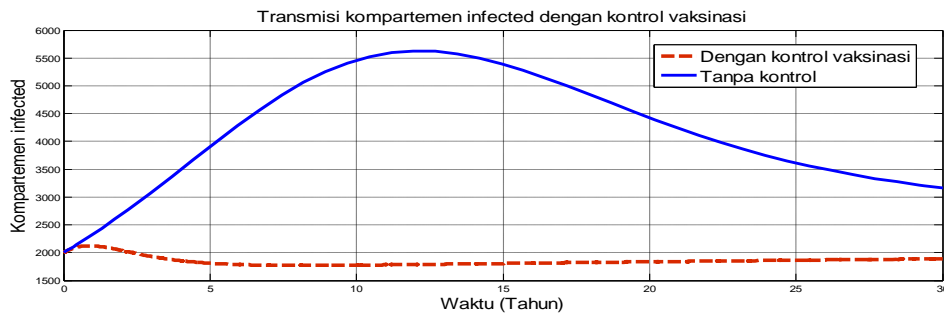
Parameter Komputasi	Simbol	Nilai
Batas bawah kontrol	u_{lb}	0
Batas atas kontrol	u_{ub}	1
Nilai awal kontrol	u_0	0,1
Bobot 97actor kompartemen <i>susceptible</i>	A_1	20
Bobot 97actor kompartemen <i>infected</i>	A_2	50
Bobot 97actor kontrol u	C	150
Nilai awal kompartemen <i>susceptible</i>	$S(0)$	98000
Nilai awal kompartemen <i>infected</i>	$I(0)$	2000
Nilai awal kompartemen <i>recovered</i>	$R(0)$	0

▪ **Kontrol efektifitas vaksinasi**

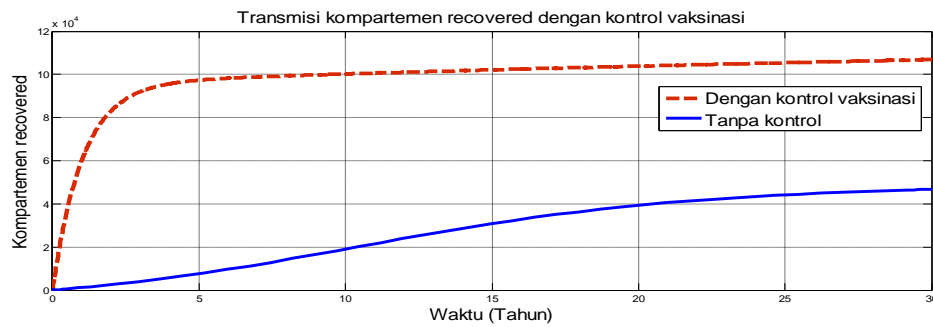
Kontrol $u(t)$ untuk mengontrol efektifitas vaksinasi dalam upaya pencegahan kompartemen *susceptible* menjadi terinfeksi. Grafik kontrol optimal efektifitas vaksinasi $u(t)$ dan tanpa kontrol, kompartemen *susceptible*, *infected*, dan *recovered* secara berturut-turut dapat dilihat seperti Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4.



Gambar 2. Kontrol dan tanpa kontrol individu kompartemen *susceptible*



Gambar 3. Kontrol dan tanpa kontrol individu kompartemen terinfeksi



Gambar 4. Kontrol dan tanpa kontrol individu kompartemen *recovered*

Pada Gambar 2 terlihat bahwa terdapat perbedaan jumlah individu *susceptible* antara kontrol vaksinasi dengan tanpa kontrol. Dari grafik terlihat bahwa pengaruh kontrol vaksinasi, jumlah individu menurun tajam dari awal sampai waktu $t = 4$ tahun, setelah waktu $t = 4$ tahun jumlah kompartemen *susceptible* dengan kontrol stabil. Sedangkan jumlah individu kompartemen *susceptible* tanpa kontrol menurun dari awal sampai waktu $t = 30$ tahun.

Pada Gambar 3 terdapat perbedaan jumlah individu kompartemen *infected* dengan kontrol vaksinasi dan tanpa kontrol dari awal sampai $t = 30$ tahun. Kompartemen *infected* tanpa kontrol dari awal sampai $t = 12$ tahun meningkat, dan setelah $t = 12$ tahun sampai $t = 30$ menurun secara perlahan. Sedangkan jumlah individu kompartemen *infected* dengan kontrol vaksinasi dari awal sampai $t = 1$ tahun meningkat

secara perlahan, setelah $t = 1$ tahun sampai $t = 5$ tahun menurun secara perlahan, dan setelah $t = 5$ tahun sampai $t = 30$ tahun meningkat dengan perlahan. Hal ini berarti bahwa kontrol vaksinasi berpengaruh positif terhadap pengendalian penyebaran suatu penyakit tipe *SIR*.

Pada Gambar 4 menunjukkan jumlah individu kompartemen *recovered* dengan kontrol vaksinasi mulai waktu $t = 0$ sampai waktu $t = 5$ tahun meningkat secara tajam, setelah $t = 5$ tahun sampai $t = 30$ tahun meningkat secara perlahan. Sedangkan jumlah individu kompartemen *recovered* tanpa kontrol vaksinasi dari awal sampai $t = 30$ tahun meningkat.

5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan dari hasil kajian model kontrol optimal diperoleh bentuk kontrol optimal vaksinasi dan variabel *adjoint* dari model pengendalian penyebaran suatu penyakit tipe *SIR*. Sedangkan dari hasil perhitungan numerik diperoleh:

1. Kontrol optimal vaksinasi dapat menurunkan penyebaran suatu penyakit.
2. Kontrol optimal vaksinasi dapat meningkatkan jumlah kompartemen *recovered*.

Dari hasil kajian kontrol optimal vaksinasi model epidemiologi tipe *SIR* disarankan mengembangkan model kontrol tersebut dengan tindakan kontrol pengobatan, pencegahan dan memperhatikan kompartemen *exposed*.

6. Ucapan Terimakasih

Sebagian dari penelitian ini didanai oleh Skema Penelitian Hibah Kompetensi 2012.

DAFTAR PUSTAKA

- Aditama, T. Y., dkk., 2011. *Strategi Nasional Pengendalian TB Di Indonesia 2010-2014*, Kemenkes RI Dirjen Pengendalian Penyakit dan Penyehatan Lingkungan.
- Agusto, F.B., 2009. *Optimal Chemoprophylaxis and Treatment Control Strategies of A Tuberculosis Transmission Model*, World journal of modelling and simulation, 3(5), 163-173.
- Bhunu, C.P. et al., 2008. *Tuberculosis Transmission Model with Chemoprophylaxis and Treatment*, Bulletin of Mathematical Biology, 70: 1163–1191.
- Brauer F. and Castillo-Chavez, C., 2000. *Mathematical Model in Population Biology and Epidemiology*, Springer.

- Castillo-Chavez, C., Feng, Z., dan Huang, W. 2002. On The Computation of R_0 and its Role on Global Stability. *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Disease: An Introduction*, IMA, Springer-Verlag, 125, 229 - 250.
- Driessche, P.v.d., and Watmough, J., 2002. *Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*, Mathematical Biosciences 180, 29–48.
- Goldmann, S. M. And Lightwood, J. 2002. *Cost Optimization in the SIS Model of Infectious Disease with Treatment*, Topics in Economic Analysis & Policy, 2(1), 1-22.
- Hethcote, H.W. 2000. The Mathematics of Infectious Disease. *SIAM REVIEW*, 42, 599-653.
- Jung, E., Iwami, S., Takeuchi, T., Jo, T.C. 2009. *Optimal Control Strategy for Prevention of Avian Influenza Pandemic*, Journal of Theoretical Biology, 260, 220–229.
- Kermack, W. O. and McKendrick, A. G., 1927. *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, Royal Society, 115: 700-721
- Kribs-Zaleta, C. M., Velasco-Hernandez, J. X., 2000. *A Simple Vaccination Model with Multiple endemic States*, Mathematical Biosciences 164:183-201.
- Naidu, D.S.(2002). *Optimal Control Systems*, CRC PRESS, NewYork.
- Neilan, R.M. and Lenhart, S., 2010. *An Introduction to Optimal Control with an Application in Disease Modeling*, DIMACS Series in Discrete Mathematics v. 75,67-81.
- Perko, L.1991. *Differential Equation and Dynamical Systems*, Springer Verlag, New York.
- Singer, B.H. and Kirschner, D.E., 2004. *Influence Of Backward Bifurcation on Interpretation Of R_0 In A Model Of Epidemic Tuberculosis With Reinfection*, Mathematical Biosciences And Engineering, 1(1), 81–93.
- Tu, P.N.V., 1994. *Introductory Optimization Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Yusuf , T.T. , Benyah, F. 2012. *Optimal control of vaccination and treatment for an SIR epidemiological Model*, World Journal of Modelling and Simulation. Vol. 8, no. 3, pp. 194-204
- Zaman, G., Kang, Y. H., Jung, I.H., 2008. *Stability Analysis and Optimal Vaccination of an SIR Epidemic Model*, BioSystems 93, 240–249.