T-9

MENGHITUNG VOLUME CADANGAN DENGAN CARA NUMERIK

Indun Titisariwati[1]

[1]Prodi Teknik Pertambangan, Fakultas Teknologi Mineral, UPN "Veteran" Yogyakarta
e-mail: indun.titisariwati@yahoo.com

Abstrak

Di dalam hal kegiatan Eksplorasi Endapan Bahan Galian, menghitung volume cadangan adalah merupakan salah satu kebutuhan. Sedangkan cara untuk menghitung volume cadangan itu banyak, salah satunya yaitu dengan cara Numerik yaitu dengan Rumusan Quadrature Cara Gauss. Cara tersebut dapat dipakai sebagai salah satu alternatif cara menghitung volume cadangan dengan data yang dibutuhkan adalah data koordinat titik pengambilan sampel, interval dari sumbu-sumbu koordinatnya dan bentuk rona permukaannya yang selanjutnya dicari bentuk fungsi Matematik dari bentuk rona permukaan tersebut. Selanjutnya dilakukan proses perhitungan dengan rumusan Quadrature Cara Gauss dengan mengambil variasi n=3.

Kata kunci: Volume, Rumusan Quadrature Cara Gauss dan Integrasi

PENDAHULUAN

Perhitungan volume cadangan suatu endapan bahan galian adalah langkah yang sangat penting dalam memprediksi langkah-langkah selanjutnya dalam kegiatan Eksplorasi. Ada banyak cara perhitungan volume tetapi dalam hal ini akan digunakan cara Numerik yaitu Rumusan Quadrature Cara Gauss.

Cara perhitungan ini sebenarnya tetap menggunakan cara Integrasi secara Numerik tetapi digunakan untuk sub interval yang tidak sama. Interval yang tidak sama ini perlu diperhatikan dalam kegiatan Eksplorasi karena pada umumnya titik pengambilan sampel di lapangan kadang kala sulit untuk mengambil interval (jarak) yang sama karena kondisi di lapangan yang tidak memungkinkan. Selain interval (jarak) dalam pengambilan sampel dibutuhkan juga tentang data kedalaman dari endapan bahan galian tersebut sehingga dapat dicari bentuk fungsi Matematik dari bentuk rona permukaannya. Dengan demikian proses perhitungan Volume cadangan endapan bahan galian dengan rumusan Quadrature Cara Gauss dapat dilakukan.

DASAR TEORI

 ISBN : 978-979-16353-8-7

RUMUSAN QUADRATURE CARA GAUSS

Rumusan yang paling akurat untuk integrasi numeric persamaan dikenal dengan cara Gauss. Tinjauan Gauss dalam perhitungan integral $\int_a^b f(x)dx$ berdasarkan nilai-nilai f(x) dalam sub interval yang tidak berjarak sama, melainkan simetris terhadap titik tengah interval.

Jika I= $\int_a^b f(x)dx$, f(x) sebagai fungsi integran maka merubah variable bebas x dengan u dalam hubungan :

$x = (b-a)u + \frac{a+b}{2}$, batasan-batasan integrasi menjadi u = - ½ dan u = + ½.

Nilai y=f(x) menjadi : y= f(x)= f $\left[(b-a)u + \frac{a+b}{2}\right] = \emptyset(u)$.

Karena : dx = (b-a) du, maka I menjadi :

$$I = (b-a)\int_{-1/2}^{1/2} \emptyset\,(u)du$$

Dengan menyatakan : $\int_{-1/2}^{1/2} \emptyset\,(u)du$ sebagai

$$\int_{-1/2}^{1/2} \emptyset\,(u)du = R_1\emptyset(u_1) + R_2\emptyset(u_2) + \ldots + R_n\emptyset(u_n)$$

Hal mana : $u_1, u_2 \ldots u_n$ adalah titik-titik dalam interval u = -1/2 ke u = ½ dengan hubungan variable x dengan u :

$$x_1 = (b-a)u_1 + \frac{a+b}{2}; \qquad x_2 = (b-a)u_2 + \frac{a+b}{2}$$

dan seterusnya maka:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)(R_1\emptyset(u_1) + R_2\emptyset(u_2) + \ldots + R_n\emptyset(u_n))$$

Masalah utama adalah menentukan nilai-nilai R_1, R_2, $R_3 \ldots R_n$, u_1, $u_2 \ldots u_n$. Dengan asumsi $\emptyset\,(u)$ dapat dinyatakan dalam seri yang konvergen di (-1/2,+1/2), bentuk polynomial sebagai fungsi dekatan dapat digunakan.Artinya:

$$\emptyset\,(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_mu^m + \ldots$$

Sehingga:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \emptyset\,(u)du = \int_{-1/2}^{1/2} (a_0 + a_1u^1 + a_2u^2 + \cdots + a_mu^m + \cdots)du$$

$$= a_0 + \frac{1}{12}a_2 + \frac{1}{80}a_4 + \frac{1}{486}a_6 + \frac{1}{2304}a_8 + \cdots$$

Dan nilai-nilai dari:

$$\emptyset(u_1) = a_0 + a_1u^1 + a_2u_1^2 + a_3u_1^3 + \cdots + a_mu_1^m + \cdots$$

$$\emptyset(u_2) = a_0 + a_1u_2^1 + a_2u_2^2 + a_3u_2^3 + \cdots + a_mu_2^m + \cdots$$

$$\emptyset(u_n) = a_0 + a_1 u_n + a_2 u_n^2 + a_3 u_n^3 + \cdots + a_m u_n^m + \cdots$$

Mengisikan $\emptyset(u_1), \emptyset(u_2), \ldots . \emptyset(u_n)$ pada persamaan di atas maka:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \emptyset\,(u) du = R_1(\,a_0 + a_1 u^1 + a_2 u_1^2 + a_3 u_1^3 + \cdots + a_m u_1^m + \cdots) +$$

$$R_2(a_0 + a_1 u_2^1 + a_2 u_2^2 + a_3 u_2^3 + \cdots + \,a_m u_2^m + \cdots) + \ldots +$$

$$R_n(a_0 + a_1 u_n + a_2 u_n^2 + a_3 u_n^3 + \cdots + \,a_m u_n^m + \cdots)$$

$$= a_0(R_1 + \,R_2 + R_3 + \cdots + R_n) + \quad a_1(R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3 + \cdots + \,R_n u_n) +$$

$$a_2(R_1 u_1^2 + R_2 u_2^2 + R_3 u_3^2 + \cdots + R_n u_n^2) + \ldots + a_m(R_1 u_1^m + R_2 u_2^m + R_3 u_3^m +$$

$$\ldots + R_n u_n^m)$$

Sehingga dapat dibentuk suatu sistim persamaan:

$$R_1 + \,R_2 + R_3 + \cdots + R_n = 1$$

$$R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3 + \cdots + \,R_n u_n = 0$$

$$R_1 u_1^2 + R_2 u_2^2 + R_3 u_3^2 + \cdots + R_n u_n^2 = 1/12$$

Dst

$R_1, R_2, R_3 \ldots \ldots R_n$ dan $u_1, u_{2 \ldots\ldots\ldots} u_n$ adalah variable yang harus ditetapkan . Dengan mengambil sebanyak 2n persamaan, secara simultan persamaan dapat diselesaikan, dengan hasil diperoleh 2n nilai-nilai $R_1, R_2, R_3 \ldots \ldots R_n$ dan $u_1, u_{2 \ldots\ldots\ldots} u_n$.
Metode solusi persamaan simultan ini cukup sulit walaupun untuk bilangan n yang kecil karena ada sepasang u dan R yang merupakan bilangan yang dicari. Cara lain penyelesaian adalah memanfaatkan $\emptyset(u)$ sebagai polynomial derajat lebih kecil dari (2n-1) , hal mana akar-akar $u_1, u_{2 \ldots\ldots\ldots} u_n$ adalah 0 dari bentuk Polinomial Legendre P_n (u) atau akar-akar dari P_n (u) = 0.
Dengan ketetapan ini, akar persamaan, akar persamaan dapat dicari dari persamaan:

$$\frac{d^n}{du^n}\left[u^2 - (\tfrac{1}{2})^2\right]^n = 0$$

Dengan $u_1, u_{2 \ldots\ldots\ldots} u_n$ merupakan akar nyata.
Mengisikan nilai-nilai $u_1, u_{2 \ldots\ldots\ldots} u_n$ pada persamaan di atas sehingga diperoleh nilai-nilai $R_1, R_2, R_3 \ldots \ldots R_n$
Dicoba akan diselesaikan untuk kasus n = 3, sehingga:

$$\frac{d^3}{du^3}\left[u^2 - (\tfrac{1}{2})^2\right]^3 = 0 \;;\; \frac{d^3}{du^3}\left[u^6 - 3u^4(\tfrac{1}{2})^2 + 3u^2(\tfrac{1}{2})^4 - (\tfrac{1}{2})^6\right] = 0$$

Menyelesaikan turunan fungsi ini, diperoleh:

$u\,(20\,u^2 - 3) = 0$, sehingga:

$u = 0 \;;\; \pm(\tfrac{1}{2})\sqrt{\tfrac{3}{5}}$

Dengan demikian : $u_1 = -\,(1/2)\sqrt{\tfrac{3}{5}}$; $u_2 = 0$ dan

$u_3 = (1/2)\sqrt{\tfrac{3}{5}}$

Memasukkan nilai-nilai u_1, u_2 dan u_3 ke dalam sistim persamaan di atas , maka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(\frac{1}{2})\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & (\frac{1}{2})\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \left(-1/2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 & 0 & \left(1/2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (\frac{1}{12}) \end{bmatrix}$$

Sehingga :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 \\ 4/9 \\ 5/18 \end{bmatrix}$$

Terlihat nilai-nilai u simetris terhadap titik tengah interval integrasi dan nilai-nilai R adalah sama untuk sepasang nilai simetris u. Dengan demikian u dari pembagian titik dapat dinyatakan sebagai u untuk pertengahan interval yaitu sepasang $u_{\pm 1}$ untuk titik-titik simetris dekat u_0 , sepanjang $u_{\pm 2}$ untuk titik-titik simetri berikutnya dan seterusnya.
Untuk menghitung Volume maka digunakan persamaan integrasi ganda yang termasuk integrasi Qubature Mekanik, yang mana fungsi integran mempunyai dua variable bebas. Integrasinya dinyatakan dengan:

$$\text{Volume} = \iint_A f(x,y)\,dA$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Integrasi numeric ganda digunakan dalam solusi rekayasa Pertambangan untuk perhitungan Volume.
Integrasi ganda bagi fungsi integran dalam persamaan di atas dapat diselesaikan secara Numerik dengan metode Gauss, yaitu:

Volume = $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy$

= (b-a)(d-c) $\left[\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} R_i R_j \ \emptyset(u_i, u_j)\right]$

Yang mana:

$$\emptyset(u,v) = f\left[(b-a)u + \frac{a+b}{2}, (d-c)v + \frac{c+d}{2}\right]$$

Koefisien R dan u dapat dilihat di atas sedangkan koefisien v dalam hal ini adalah sama seperti koefisien u tetapi diperlakukan terhadap variable y.

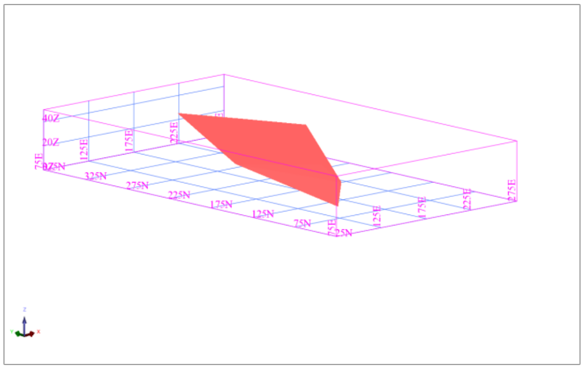
STUDI KASUS

Data di bawah ini adalah data hasil pengukuran koordinat (x,y,z) dari suatu kegiatan Eksplorasi Pendahuluan terhadap suatu daerah yang terdapat Batu Andesit.
Data-datanya adalah sebagai berikut :

x	y	z
100	50	17.07107
125	200	25.32248
150	100	22.24745
175	150	25.47621
200	350	32.85042
225	300	32.32051
250	250	31.62278

Tabel 1
Koordinat x, y dan z

Dari data tersebut di atas dibuat gambar bidangnya atau dengan kata lain dicari bentuk dari fungsi: z = f(x,y). Bentuk bidang dari data di atas adalah seperti di bawah ini:



Gambar 1
Bidang Tampak Depan dari Koordinat
x, y dan z

Setelah itu baru dihitung Volumenya dengan menggunakan Rumusan Quadrature Cara Gauss, dengan mengambil n = 3.
Langkah-langkah perhitungannya adalah sebagai berikut:

1. Ditentukan n = 3, sehingga didapat harga-harga:

   a. $u_0 = 0$; $v_0 = 0$; $R = 0{,}4444444444$

   b. $u_{\pm 1} = 0{,}3872983346$; $v_{\pm 1} = 0{,}3872983346$; $R = 0{,}625$

   Dipakai harga-harga u dan v karena batas interval dasarnya adalah sumbu x dan Sumbu y

2. Mendefinisikan variable x dan y sbb:

   $x = (250 - 100)u + \frac{(100+250)}{2}$; x = 150 u + 175

   $y = (350 - 50)v + \frac{(50+350)}{2}$; y = 300 v + 200

   Sehingga: $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

   $$z = \sqrt{150u + 175} + \sqrt{300v + 200}$$
   $$= \emptyset(u, v)$$

3. Memasukkan harga-harga u dan v yaitu :

   $$\emptyset(u_0, v_o) = \sqrt{175} + \sqrt{200}$$
   $$= 13{,}228757 + 14{,}142136 = 27{,}370893$$

$$\emptyset(u_{+1}, v_{+1}) = \sqrt{(150.0{,}3872983346) + 175} + \sqrt{(300.0{,}3872983346) + 200}$$
$$= 15{,}267441 + 17{,}781718 = 33{,}049159$$

$$\emptyset(u_{-1}, v_{-1}) = \sqrt{(-0{,}3872983346.150) + 175} + \sqrt{(-0{,}3872983346.300) + 200}$$
$$= 10{,}812273 + 9{,}1548075 = 19{,}967081$$

Sehingga dengan menggunakan Rumusan Quadrature Cara Gauss didapat:

Volume=(250-100)(350-50)$\{(27{,}370893.0{,}4444444444) + 0{,}625(33{,}049159 + 19{,}967081)\}$
= 2.038.499,6 satuan

Rumusan Quadrature Cara Gauss ini sebaiknya digunakan untuk menghitung Volume endapan bahan galian yang homogen (sejenis) dari lapisan atas sampai lapisan bawah, sebagai contoh Batu Andesit, Pasir dan Batugamping.
Mengapa sebaiknya dipakai untuk endapan bahan galian yang sejenis?
Pertanyaan di atas dapat dijawab sebagai berikut:
Bidang atas seperti yang tampak pada gambar di atas sampai ke bidang dasar dianggap suatu endapan bahan galian yang sejenis, sedangkan bidang dasar dari endapan bahan galian tersebut dianggap rata (datar). Koordinat x dan y sebagai bidang dasarnya , ketinggian atau kedalaman dari endapan bahan galiannya dinyatakan dengan z.
Sehingga z itu dapat dinyatakan sebagai fungsi dari dua variable, yaitu z = f(x,y). Untuk contoh data di atas didapat: $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
Setelah dilakukan perhitungan volume dengan Rumusan Quadrature Cara Gauss maka Volume Andesit di bawah bidang yang berbentuk: $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; dengan jarak x nya dari 100 m sampai 250 m, intervalnya 25 m; sedangkan jarak y nya dari 50 m sampai 350 m, dengan intervalnya yang tidak seragam adalah 2.038.499,6 satuan.
Diharapkan jumlah volume tersebut dapat terambil semuanya karena endapan bahan galiannya homogen (sejenis), tetapi dapat juga jumlah volume di atas tidak bisa terambil semuanya disebabkan adanya factor teknis dalam tahapan pengambilannya sehingga menyebabkan endapan bahan galian yang didapatkan kurang maksimal.

KESIMPULAN

1.Menghitung volume endapan bahan galian dapat menggunakan cara Numerik yaitu Rumusan Quadrature Cara Gauss

2.Endapan bahan galian yang dapat dihitung dengan Rumusan Quadrature Cara Gauss adalah merupakan endapan bahan galian yang homogen (sejenis)

3.Bidang xoy merupakan bidang dasar yang dianggap rata (datar) sedangkan z nya bervariasi sehingga dapat dibentuk suatu bidang yang dinyatakan dengan z = f(x,y)

ISBN : 978-979-16353-8-7

4.Data dimasukkan ke Rumusan Quadrature Cara Gauss

DAFTAR PUSTAKA

1.Amrinsyah Nasution Hasballah, 1997, Metode Numerik Dalam Ilmu Rekayasa dan Sains, Institut Teknologi Bandung, halaman 57

2.Chapra, Steven C; Canale, Raymond P, 1991, Metode Numerik Untuk Teknik Dengan Penerapan Pada Komputer Pribadi, UI- Press, halaman 530

3.P Buyung Kosasih, 2006, Komputasi Numerik; Teori dan Aplikasi, Andi Offset Yogyakarta, halaman 323