

## REPRESENTASI SISWA SEKOLAH DASAR DALAM PEMAHAMAN KONSEP PECAHAN

*Wiryanto*

*Dosen Unesa, Mhs. S3 Pendidikan Matematika Unesa*  
e-mail: [wiryantoro29@yahoo.co.id](mailto:wiryantoro29@yahoo.co.id)

### *Abstrak*

Standar representasi (NCTM) menetapkan bahwa program pembelajaran mulai pra-Taman Kanak-kanak sampai kelas XII harus memungkinkan siswa untuk: (1) menciptakan dan menggunakan representasi untuk mengorganisir, mencatat, dan mengkomunikasikan ide-ide matematis, (2) memilih, menerapkan, dan menerjemahkan representasi matematis untuk memecahkan masalah, (3) menggunakan representasi untuk memodelkan dan menginterpretasikan fenomena fisik, sosial, dan fenomena matematis. Pencantuman representasi sebagai komponen standar proses dalam *Principles and Standards for School Mathematics* selain kemampuan pemecahan masalah, penalaran, komunikasi, dan koneksi cukup beralasan karena untuk berpikir matematis dan mengkomunikasikan ide-ide matematis seseorang perlu merepresentasikannya dalam berbagai bentuk representasi matematis. Selain itu tidak dapat dipungkiri bahwa objek dalam matematika itu semuanya abstrak sehingga untuk mempelajari dan memahami ide-ide abstrak itu tentunya memerlukan representasi. Representasi terjadi melalui dua tahapan, yaitu representasi internal dan representasi eksternal. Wujud representasi eksternal antara lain: verbal, gambar dan benda konkrit. Berpikir tentang ide matematika yang memungkinkan pikiran seseorang bekerja atas dasar ide tersebut merupakan representasi internal. Representasi internal dari seseorang sulit untuk diamati secara langsung karena merupakan aktivitas mental dari seseorang dalam pikirannya (*minds-on*). Tetapi representasi internal seseorang itu dapat disimpulkan atau diduga berdasar-kan representasi eksternalnya dalam berbagai kondisi, misalnya dari pengungkapannya melalui kata-kata (lisan), melalui tulisan berupa simbol, gambar, grafik, tabel ataupun melalui alat peraga (*hand-on*). Dengan kata lain terjadi hubungan timbal balik antara representasi internal dan eksternal dari seseorang ketika berhadapan dengan sesuatu masalah. Pada penelitian ini, representasi yang digunakan adalah representasi Bruner yang meliputi enaktif (*enactive*), ikonik (*iconic*) dan simbolik (*symbolic*), dimana masing-masing tahapan akan disajikan dua model representasi pecahan dengan konsep bagian dari keseluruhan (*part-two-whole concept*) dan model bagian suatu himpunan yang bagian-bagiannya kongruen (*part-group, congruent parts*). Penelitian ini termasuk jenis penelitian eksploratif dengan pendekatan kualitatif, dan berdasar pada wawancara berbasis tugas. Penelitian ini untuk mengungkap hakekat dari gejala yang muncul dari subjek penelitian. Hasil penelitian menunjukkan bahwa siswa telah memahami konsep pecahan (melalui representasi internal siswa) dengan baik pada setiap level teori Bruner dan siswa mampu memahami konsep pecahan pada peralihan (transisi) dari representasi konkrit ke ikonik, dan dari ikonik ke bentuk representasi yang lebih abstrak (representasi simbolik).

**Kata Kunci:** abstraksi, representasi, dan pecahan

---

## PENDAHULUAN

### 1. Latar Belakang

Standar representasi (NCTM) menetapkan bahwa program pembelajaran mulai pra-Taman Kanak-kanak sampai kelas XII harus memungkinkan siswa untuk: (1) menciptakan dan menggunakan representasi untuk mengorganisir, mencatat, dan mengkomunikasikan ide-ide matematis, (2) memilih, menerapkan, dan menerjemahkan representasi matematis untuk memecahkan masalah, (3) menggunakan representasi untuk memodelkan dan menginterpretasikan fenomena fisik, sosial, dan fenomena matematis. (NCTM, 2000). Pencantuman representasi sebagai komponen standar proses dalam *Principles and Standards for School Mathematics* selain kemampuan pemecahan masalah, penalaran, komunikasi, dan koneksi cukup beralasan karena untuk berpikir matematis dan mengkomunikasikan ide-ide matematis seseorang perlu merepresentasikannya dalam berbagai bentuk representasi matematis. Selain itu tidak dapat dipungkiri bahwa objek dalam matematika itu semuanya abstrak sehingga untuk mempelajari dan memahami ide-ide abstrak itu tentunya memerlukan representasi.

Representasi yang dimunculkan oleh siswa merupakan ungkapan-ungkapan dari gagasan-gagasan atau ide-ide matematis yang ditampilkan siswa dalam suatu upaya untuk mencari suatu solusi masalah yang sedang dihadapinya. Dengan demikian, diharapkan bahwa bilamana siswa memiliki akses representasi-representasi dan gagasan-gagasan yang mereka tampilkan, maka mereka memiliki sekumpulan alat yang siap secara signifikan akan memperluas kapasitas mereka dalam berpikir matematis (NCTM, 2000).

Salah satu konsep matematika yang menjadi fokus penelitian dewasa ini adalah pecahan. Pantazi, dkk. (2009) meneliti mengenai representasi internal pecahan siswa sekolah dasar yang berumur 8–11 tahun yang memiliki kemampuan matematika beragam. Penelitiannya dilatarbelakangi oleh kenyataan bahwa siswa-siswa di daerah Midland, Inggris mengalami kesulitan dalam mengabstraksi konsep pecahan. Ketika siswa ditanya “Apa yang dimaksud dengan pecahan?”, siswa-siswa cenderung menjawab “sesuatu yang sangat kecil”, “lingkaran yang dipotong kecil-kecil”, atau “suatu bentuk dengan banyak garis-garis”.

Pecahan merupakan salah satu konsep yang sulit dipahami dalam matematika sekolah dasar (SD). Hal ini disebabkan karena keabstrakan konsep tersebut, sedangkan siswa sekolah dasar kelas III yang mulai mempelajarinya, menurut Piaget, masih berada pada tahap operasi konkrit (umur 7–11 tahun). Dimana pada tahap tersebut, ide anak masih dilandasi oleh observasi dan pengamatan pada obyek-obyek nyata, tetapi ia sudah mulai menggeneralisasi atau membagi-bagi (memecah) dengan memanipulasi obyek-obyek sebagai cara untuk mengetahui (Hudojo, 2005:4). Lebih lanjut, Clarke, *et al.* mengatakan bahwa konsep pecahan bukan merupakan konsep yang sederhana. Keunikan dari bilangan pecahan, yang berbeda dengan bilangan asli dan bilangan bulat, terkadang menjadikannya sulit untuk dipahami siswa (Pitkethly & Hunting, 1996; Gould, 2005) dan menjadikan sulit untuk dikenalkan kepada siswa (Clarke, *et al.*, 2007).

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk menginvestigasi kesulitan-kesulitan dalam memahami dan membelajarkan materi pecahan. Vale (2007) menemukan bahwa siswa akan lebih banyak berpeluang untuk melakukan kesalahan pada operasi pecahan jika pembelajaran materi pecahan hanya menitikberatkan pada menghafal rumus dan prosedur operasi tanpa ada perhatian yang cukup pada makna pecahan. Selain itu,

kekomplesan karakteristik dan konsep pecahan membutuhkan tahapan pemahaman yang membuatnya tidak bisa dipahami dalam waktu yang relatif singkat (Yusof dan Malone, 2003). Lebih lanjut penelitian yang dilakukan Clarke, et al. (2007) menemukan bahwa metode dan strategi pembelajaran yang kurang tepat juga dapat memberikan kontribusi pada miskonsepsi siswa.

Oleh sebab itu melalui penelitian ini diharapkan untuk mempelajari/memahami konsep pecahan, siswa mulai dengan benda-benda nyata kemudian mereka dibimbing untuk memperoleh sesuatu yang abstrak yaitu konsep pecahan. Pertama kali, siswa diajak memanipulasi wakil-wakil (representasi) pecahan berupa benda nyata/konkrit (*enaktif*). Wakil suatu konsep dinamakan representasi konsep tersebut. Kemudian kegiatan tersebut dinyatakan dengan gambar-gambar (*ikonik*). Akhirnya, siswa menyatakan konsep tersebut dengan wakil-wakil yang berupa simbol atau notasi matematika (*simbolik*). Dari ketiga kegiatan tersebut, siswa diharapkan dapat memperoleh konsep pecahan. Penggunaan wakil-wakil atau representasi yang tidak tepat dapat mengakibatkan siswa tidak dapat memahami suatu konsep. Selain itu, peralihan (transisi) antar representasi-representasi tersebut juga dapat menyebabkan siswa kehilangan makna dari konsep itu sendiri.

Proses perpindahan dari level ikonik menuju simbolik perlu mendapat perhatian dalam pembentukan konsep matematika. Apabila tidak hati-hati, maka proses ini akan menjadi tidak bermakna karena simbol memiliki sifat abstrak dan kosong dari arti (Soedjadi, 2000). Menurut prinsip notasi, pencapaian suatu konsep dan penggunaan simbol matematika harus secara bertahap, dari sederhana secara kognitif dapat dipahami siswa kemudian perlahan-lahan meningkat ke lebih kompleks. Bruner lebih menekankan agar setiap siswa mengalami dan mengenal peristiwa atau benda nyata di sekitar lingkungannya, kemudian menemukan dengan sendiri untuk merepresentasikan peristiwa atau benda tersebut dalam pikirannya. Ini sering dikenal sebagai model mental tentang peristiwa yang dialami atau benda yang diamati dan dikenali oleh siswa. Proses sampai pada model mental tersebut ialah suatu proses abstraksi.

Berdasarkan hal-hal yang diuraikan di atas, penting untuk mengetahui bagaimana pemahaman siswa sekolah dasar dalam merepresentasi konsep pecahan. Oleh karena itu dilakukan suatu penelitian dengan judul "*Representasi Siswa Sekolah Dasar dalam Pemahaman Konsep Pecahan*".

## **2. Pertanyaan Penelitian**

Berdasarkan latar belakang tersebut maka pertanyaan penelitian ini adalah: "Bagaimanakah pemahaman siswa sekolah dasar dalam merepresentasikan konsep pecahan melalui tahapan Bruner?"

## **3. Tujuan Penelitian**

Tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan pemahaman siswa sekolah dasar dalam merepresentasikan konsep pecahan bila ditinjau berdasarkan teori Bruner.

## **4. Manfaat Penelitian**

Setelah penelitian dilakukan, maka hasil penelitian diharapkan dapat bermanfaat untuk:

- a. Memberi kontribusi terhadap perkembangan teori representasi anak dalam pemahaman konsep pecahan.
- b. Memberi masukan kepada pembaca yang tertarik dengan topik ini untuk penelitian lebih lanjut.

---

## KAJIAN PUSTAKA

### 1. Pemahaman Matematika

Dalam NCTM 2000 disebutkan bahwa pemahaman matematis merupakan aspek yang sangat penting dalam prinsip pembelajaran matematika. Polyamengemukakan empat tingkat pemahaman suatu hukum atau konsep, yaitu pemahaman mekanikal, pemahaman induktif, rasional dan intuitif. Seseorang bisa dikatakan mempunyai pemahaman mekanikal suatu konsep, jika ia dapat mengingat dan menerapkan konsep itu secara benar. Kemudian seseorang dikatakan telah memiliki pemahaman induktif suatu konsep, jika ia telah mencobakan konsep itu berlaku dalam kasus yang sederhana dan yakin bahwa konsep itu berlaku dalam kasus serupa. Seseorang dikatakan telah memiliki pemahaman rasional suatu konsep, jika ia dapat membuktikannya. Selanjutnya seseorang dikatakan telah memiliki pemahaman intuitif suatu konsep, jika ia telah yakin akan kebenaran konsep tersebut tanpa ragu-ragu.

Skemp (1976) membedakan dua jenis pemahaman, yaitu pemahaman instrumental dan relasional. Pemahaman instrumental sejumlah konsep diartikan sebagai pemahaman atas konsep yang saling terpisah dan hanya hafal rumus serta menerapkannya dalam perhitungan tanpa mengetahui alasan-alasan dan penjelasannya. Sebaliknya pada pemahaman relasional termuat suatu skema atau struktur pengetahuan yang kompleks dan saling berelasi atau berhubungan yang dapat digunakan pada penyelesaian masalah yang lebih luas dan kompleks.

Hiebert (Even & Tirosh, 2002) mengemukakan pendapatnya tentang pengetahuan prosedural (*procedural knowledge*) yang identik dengan pemahaman instrumental, dan pengetahuan konseptual (*conceptual knowledge*) yang identik pemahaman relasional.

Anderson & Krathwohl (2001) dalam Taxonomi Bloom yang direvisi menyatakan bahwa proses kognitif dari pemahaman ada 7, yaitu (1) *interpreting* menginterpretasikan: mengubah dari satu representasi ke representasi yang lain, (2) *exemplifying/illustrating*: menemukan contoh spesifik ataupun ilustrasi dari sebuah konsep, (3) *classifying* (mengklasifikasikan): menentukan bahwa suatu contoh atau suatu kasus termasuk dalam kategori dari suatu konsep atau tidak, (4) *summarizing, generalizing* (menyimpulkan): membuat suatu stateman atau pernyataan yang merepresentasikan beberapa informasi yang disajikan, (5) *inferring* (menduga): menemukan pola dari suatu kumpulan contoh atau kasus, (6) *comparing* (membandingkan): mendeteksi kesamaan dan perbedaan antara dua objek atau lebih, (7) *explainig* (menjelaskan): mengkonstruksi dan menggunakan sistem sebab akibat dari suatu konsep.

### 2. Pengertian Representasi Dalam Matematika

Tinjauan secara umum representasi dapat diklasifikasi menjadi dua, yaitu representasi internal dan representasi eksternal (Hudojo, 2005; Izsák, Andrew, 2003). Menurut para peneliti bidang pendidikan matematika, ahli kognitif, dan ahli psikologi kognitif, representasi internal merujuk pada istilah *struktur pengetahuan* untuk menjelaskan struktur-struktur mental dimana seseorang melakukan pengkodean (*encoding*), penyimpanan (*storing*), pemanggilan (*retrieving*), atau transformasi informasi (*transforming information*) (Izsák, Andrew, 2003). Sejalan dengan itu, Hudojo (2005) mengungkapkan berpikir tentang ide matematika yang memungkinkan pikiran seseorang bekerja atas dasar ide tersebut merupakan representasi internal. Representasi tersebut tidak dapat diamati karena ada di dalam mental (pikiran) seseorang. Untuk mengetahui apa yang dipikirkan, seseorang memerlukan representasi

eksternal yang berbentuk verbal, gambar dan benda konkrit. Izsák, Andrew (2003) mengungkapkan representasi eksternal merujuk pada benda (*artifact*) yang dihasilkan manusia untuk berpikir atau menyampaikan informasi mengenai beberapa konteks yang berbeda dari karya-karya tersebut. Contoh representasi eksternal adalah simbol-simbol matematika, tanda-tanda, karakter, dan signal (Luitel, 2009). Dengan kata lain, representasi internal merujuk pada konstruksi mental (*mental constructs*), sedangkan representasi eksternal pada notasi-notasi material (*material-notations*).

Pendapat tersebut sejalan dengan definisi yang dikemukakan oleh Luitel, Bal Chandra (2009) bahwa ada empat ide mengenai konsep representasi, yaitu: (a) Dalam domain matematika, representasi dapat diartikan sebagai “*internal-abstraction of mathematical ideas or cognitive schemata that are developed by the learner through experience*”. Hal ini berarti representasi merupakan proses mencari kesamaan-kesamaan dengan mereduksi perbedaan-perbedaan (abstraksi) terhadap ide-ide matematika atau skemata kognitif yang terjadi dalam pikiran (internal) pembelajar yang dikembangkannya melalui pengalaman atau pengetahuan sebelumnya. (b) Representasi didefinisikan sebagai “*mental reproduction of a former mental state*”. Ini berarti representasi merupakan pembuatan kembali (*reproduksi*) gambar-gambar secara internal berdasarkan pada pemaknaan mental sebelumnya. (c) Representasi diartikan sebagai “*a structurally equivalent presentation through pictures, symbols and signs*”. Jadi, representasi berarti kehadiran konsep-konsep melalui gambar-gambar, simbol-simbol, dan tanda-tanda abstrak yang ekuivalen secara struktural. (d) Representasi dikenal juga sebagai “*something in place of something*”, yang berarti sesuatu sebagai ‘wakil’ dari sesuatu.

Pengertian lain diungkapkan oleh Hwang, dkk. (2009) yang menyatakan representasi merupakan proses pemodelan benda-benda konkrit dalam dunia nyata kedalam konsep-konsep abstrak atau simbol-simbol. Sebagai contoh, ada kejadian berikut “umur Ibu empat kali umur Dini”. Jika umur Ibu dimisalkan  $x$  tahun dan umur Dini  $y$  tahun. Maka kejadian tersebut dapat direpresentasikan atau diwakili oleh suatu persamaan yaitu  $x = 4y$  atau  $y = \frac{1}{4}x$ .

### 3. Representasi Dalam Pandangan Bruner

Bruner yang memiliki nama lengkap Jerome S. Bruner seorang ahli psikologi (1951) dari Universitas Harvard-Amerika Serikat, telah memelopori aliran psikologi kognitif yang memberi dorongan agar pendidikan memberikan perhatian pada pentingnya pengembangan berpikir. Bruner banyak memberikan pandangan mengenai perkembangan kognitif manusia, bagaimana manusia belajar atau memperoleh pengetahuan, menyimpan pengetahuan dan menransformasi pengetahuan. Dasar pemikiran teorinya memandang bahwa manusia sebagai pemeroses, pemikir dan pencipta informasi. Bruner menyatakan belajar merupakan suatu proses aktif yang memungkinkan manusia untuk menemukan hal-hal baru di luar informasi yang diberikan kepada dirinya.

Menurut Bruner (dalam Hudoyo, 1990) belajar matematika adalah belajar mengenai konsep-konsep dan struktur-struktur matematika yang terdapat dalam materi yang dipelajari, serta mencari hubungan antara konsep-konsep dan struktur-struktur matematika itu. Siswa harus dapat menemukan keteraturan dengan cara mengotak-atik bahan-bahan yang berhubungan dengan keteraturan intuitif yang sudah dimiliki siswa. Dengan demikian siswa dalam belajar, haruslah terlibat aktif mentalnya agar dapat mengenal konsep dan struktur yang tercakup dalam bahan yang sedang dibicarakan,

anak akan memahami materi yang harus dikuasainya itu. Ini menunjukkan bahwa materi yang mempunyai suatu pola atau struktur tertentu akan lebih mudah dipahami dan diingat anak.

Bruner (dalam Luitel, 2001), membedakan tiga jenis model mental representasi, (1) Representasi **Enaktif** (*enactive*) adalah representasi sensorimotor yang dibentuk melalui aksi atau gerakan. Pada tahap ini penyajian yang dilakukan melalui tindakan anak secara langsung terlibat dalam memanipulasi (mengotak-atik) objek. Pada tahap ini anak belajar sesuatu pengetahuan dimana pengetahuan itu dipelajari secara aktif dengan menggunakan benda-benda konkret atau menggunakan situasi nyata, dan anak tanpa menggunakan imajinasinya atau kata-kata. Ia akan memahami sesuatu dari berbuat atau melakukan sesuatu. (2) Representasi **Ikonic** (*iconic*) berkaitan dengan image atau persepsi, yaitu suatu tahap pembelajaran sesuatu pengetahuan di mana pengetahuan itu direpresentasikan/diwujudkan dalam bentuk bayangan visual (*visual imagery*), gambar, atau diagram yang menggambarkan kegiatan konkret atau situasi konkret yang terdapat pada tahap enaktif. Bahasa menjadi lebih penting sebagai suatu media berpikir. (3) Representasi **Simbolik** (*symbolic*) berkaitan dengan bahasa matematika dan simbol-simbol. Anak tidak lagi terkait dengan objek-objek seperti pada tahap sebelumnya. Anak sudah mampu menggunakan notasi tanpa ketergantungan terhadap objek riil. Pada tahap simbolik ini, pembelajaran direpresentasikan dalam bentuk simbol-simbol abstrak (*abstrac symbols*), yaitu simbol-simbol arbiter yang dipakai berdasarkan kesepakatan dalam bidang yang bersangkutan, baik simbol-simbol verbal (misalnya huruf-huruf, kata-kata, kalimat-kalimat), lambang-lambang matematika maupun lambang-lambang abstrak yang lain.

Dalam pandangan Bruner (*enactive, iconic, dan symbolic*) berhubungan dengan perkembangan mental seseorang, dan setiap perkembangan representasi yang lebih tinggi dipengaruhi oleh representasi lainnya. Sebagai contoh, untuk sampai pada pemahaman konsep pecahan untuk siswa SD, dapat diperoleh melalui beberapa pengalaman terkait, misalnya diawali dengan memanipulasi benda kongkrit seperti buah jeruk, apel, roti tar sebagai bentuk representasi *enactive*. Kemudian aktivitas tersebut diingatnya dan menghasilkan serta memperkaya melalui gambar-gambar (seperti gambar jeruk, gambar apel, gambar bangun bidang datar persegi, persegi panjang, segitiga dan lingkaran) atau persepsi statis dalam pikiran anak yang dikenal sebagai representasi *iconic*. Dengan mengembangkan berbagai persepsinya, simbol yang dikenalnya dimanipulasi untuk menyelesaikan suatu masalah sebagai perwujudan representasi *symbolic* (Resnick & Ford, 1981).

#### 4. Peranan Representasi dalam Pembelajaran Matematika

Ada dua tipe representasi yang mempengaruhi pemahaman matematika siswa dan pemecahan masalah yaitu representasi instruksional dan representasi kognitif. Representasi instruksional digunakan guru untuk membantu siswa memahami matematika, misal definisi, contoh dan model matematika. Sedangkan representasi kognitif dikonstruksi oleh siswa sendiri dalam rangka memahami konsep atau mencari solusi dari permasalahan matematika. Representasi yang pertama berperan penting dalam mengembangkan sistem representasi shared. Sebagai contoh, dalam rangka merepresentasikan lingkaran satuan, guru dan siswa mendiskusikan persamaan  $x^2 + y^2 = 1$ . Aktivitas tersebut membangun representasi shared. Di lain pihak, aktivitas-aktivitas seperti mensketsa grafik untuk memahami konsep, mencari hubungan antara  $x^2 + y^2 = 1$  dan  $x^2 + 2xy + y^2 = 4$  serta menulis jurnal mengenai apa yang telah



terjadi dalam ruang kelas akan membentuk sistem representasi internal. Berdasarkan kondisi tersebut, nampak peranan representasi dalam pembelajaran matematika. Luitel, Bal Chandra (2009) mengungkapkan tujuh peranan representasi sebagai berikut.

**(1). Representasi sebagai alat komunikasi.**

Komunikasi merupakan standar proses dari pembelajaran matematika di sekolah. Siswa harus dapat mengkomunikasikan dengan baik kepada teman-teman sekelasnya mengenai solusi yang mereka peroleh dan matematika yang dipelajari. Kemampuan untuk mengkomunikasikan ini dapat menambah pemahaman siswa terhadap matematika (Krulik, dkk, 2009). Dengan kata lain, komunikasi merupakan hal penting dalam keberhasilan matematika.

Komunikasi seringkali disebut sebagai salah satu peranan penting representasi dalam pembelajaran matematika (Skemp, 1982). Sebagai alat komunikasi, representasi membantu mengkomunikasikan ide-ide matematika, dan membantu komunikasi diantara individu-individu. Sebagai contoh, kata “pecahan” merupakan wakil dari suatu ide dalam matematika yaitu pecahan. Ini berarti kata tersebut mengkomunikasikan suatu ide yaitu konsep pecahan. Kata itu dapat digunakan guru untuk membicarakan konsep pecahan pada siswa dalam ruang kelas. Selain itu, siswa juga dapat menggunakan kata tersebut ketika mengkomunikasikan bilangan-bilangan yang senilai dengan  $\frac{3}{4}$ .

**(2). Representasi sebagai Indikator Sikap siswa terhadap Matematika.**

Representasi internal suatu konsep merupakan wakil konsep tersebut dalam pikiran siswa. Wakil ini dibutuhkan terutama ketika siswa ingin membicarakan atau mempelajari suatu konsep matematika. Tentu saja, siswa akan mengalami kesulitan dalam belajar atau menyelesaikan masalah-masalah, jika tidak memiliki wakil konsep. Sebagai contoh, siswa akan sulit menjawab kenapa  $\frac{1}{2}$  lebih besar dari  $\frac{3}{4}$ , jika ia tidak dapat merepresentasikan pecahan-pecahan tersebut dalam bentuk gambar-gambar.

Dengan demikian, ada tidaknya wakil suatu konsep dalam pikiran siswa menjadi salah satu indikator apakah siswa paham konsep tersebut atau tidak? Apakah siswa dapat menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan konsep tersebut atau tidak? Siswa yang merasa “tidak paham” atau “tidak bisa” lambat laun akan mempunyai sikap tidak menyukai matematika. Sebaliknya, siswa yang bisa akan termotivasi untuk terus belajar matematika. Ada tidaknya representasi internal (wakil konsep) menjadi indikator sikap siswa terhadap matematika.

**(3). Representasi Sebagai Bukti Pemahaman Matematika Siswa.**

Representasi eksternal menggambarkan apa yang ada dalam pikiran seseorang (representasi internal). Misalkan seorang siswa merepresentasikan pecahan  $\frac{3}{4}$  dengan gambar atau wakil yang tidak sesuai. Ini berarti siswa belum paham mengenai konsep pecahan. Sebaliknya, siswa yang mampu merepresentasikan suatu konsep baik dalam bentuk benda konkrit, gambar atau simbolik menunjukkan pemahaman terhadap suatu konsep tersebut. Dengan demikian, representasi menjadi bukti dari pemahaman matematika siswa.

**(4). Representasi sebagai Penghubung antar Konsep-konsep.**

Representasi bukanlah entitas sesuatu, tetapi merupakan ide-ide beragam dari pernyataan-pernyataan hubungan-hubungan, konsep-konsep dan prinsip-prinsip. Lebih lanjut, representasi membantu memvisualisasi hubungan-hubungan antara konsep-konsep. Representasi dari lingkaran membutuhkan hubungan antara konsep grafik fungsi dan persamaan kuadrat. Konsep grafik membutuhkan konsep bidang Cartesius.

Jadi, terjadi hubungan-hubungan antara konsep-konsep ketika siswa mau merepresentasikan lingkaran  $x^2 + 2xy + y^2 = 4$ .

**(5). *Representasi Merupakan Proses Pengembangan yang Berada Dalam Kontinum Prosedural – Konseptual.***

Menurut Karmiloff-Smith, informasi implisit yang tersimpan dalam otak berbentuk representasi internal. Informasi tersebut disimpan melalui suatu proses berulang (iteratif) yang disebut proses redeskripsi. Berikut tabel yang menggambarkan proses Representasi Redeskripsi (RR).

**Tabel 2.1.** Model RR 3-phase (Luitel, 2009)

Fase	Menyatakan	Berhubungan dengan	Tujuan
Prosedural	Kinerja	Algoritma, mnemonik, fakta-fakta, rumus	Orientasi sukses
Meta Prosedural	Pengetahuan internal	Jaringan fakta-fakta, rumus dan pengalaman sebelumnya	Orientasi perilaku organisasi
Konseptual	Pengaturan pengetahuan dengan jaringan mental internal	Pengetahuan relasional dan konseptual	Membuat kontrol pada kontinum eksternal-internal

Menurut model RR, pada fase prosedural, siswa lebih berorientasi pada hasil dan menunjukkan kinerja algoritma mereka. Pada fase meta prosedural, sifat representasi berbeda dengan fase sebelumnya. Siswa menunjukkan konstruksi meta prosedural, sebagai contoh interpretasi dari algoritma dan rasionalisasi dari prosedur tersebut. Pada tingkat 3, mereka menunjukkan kontrol atas kontinum eksternal-internal dimana representasi diatur dalam jaringan mental siswa. Sebagai contoh, siswa dapat menyatakan situasi masalah dalam bentuk-bentuk apa yang ditanyakan, proses apa yang digunakan, dan apa kemungkinan solusi yang melibatkan konsep-konsep dalam masalah.

**(6). *Sistem Representasi dapat Mengatasi Penghalang-penghalang Kognitif.***

“Penghalang kognitif” adalah suatu potongan pengetahuan dari siswa yang telah memuaskan pada waktu menyelesaikan masalah-masalah tertentu, dan telah tersimpan dalam pikirannya tetapi menjadi tidak kemudian ketika menghadapi masalah-masalah baru, pengetahuan siswa tersebut tidak cukup dan kesulitan untuk beradaptasi. Penghalang-penghalang tersebut dapat diatasi melalui meningkatkan kekuatan sistem representasional. Pada umumnya, penghalang dapat diatasi karena sistem-sistem representasional dihubungkan satu sama lain. Sebagai contoh, representasi aturan perkalian akan mudah dipahami jika dihubungkan dengan konsep penjumlahan. Demikian juga, jika representasi dikembangkan melalui perspektif yang lebih luas maka akan membantu dalam pembelajaran selanjutnya. Jika sistem perkalian bilangan bulat didiskusikan dan direpresentasikan sebagai perubahan “skala”, maka siswa akan lebih mudah ketika memahami perkalian dari pecahan.

**(7). *Representasi bukanlah metode tetapi bagian dari proses mengkonstruksi ide-ide matematika.***

Representasi bukanlah metode atau teori pembelajaran. Dengan representasi, siswa mengkonsolidasi ide-ide mereka dalam suatu cara yang simetrik. Lebih lanjut, sistem representasi dapat membantu mengembangkan kategori-kategori dan sub-sub kategori



dari ide-ide yang direpresentasikan siswa. Pada umumnya, representasi membantu dalam penyederhanaan struktur paradigmatik dari belajar pengetahuan matematika.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini termasuk jenis penelitian eksploratif dengan pendekatan kualitatif, yang berdasar pada wawancara berbasis tugas. Penelitian ini untuk mengungkap hakekat dari gejala yang muncul dari subjek penelitian. Hakekat tersebut digunakan dalam rangka pemahaman siswa tentang konsep pecahan terhadap representasi pecahan dan untuk menggambarkan peralihan/ transisi dari pemahaman bentuk representasi yang satu ke bentuk representasi yang levelnya lebih tinggi (berdasarkan teori Bruner). Hakekat tersebut ditelusuri melalui wawancara berbasis tugas kepada setiap subjek. Instrumen pendukung yang disiapkan adalah pedoman wawancara yang meliputi tiga tahap representasi abstraksi menurut Bruner, yaitu enaktif, ikonik, dan simbolik, dimana masing-masing tahapan akan disajikan model representasi pecahan dengan konsep bagian dari keseluruhan (*part-two-whole concept*) dan konsep pecahan sebagai bagian dari suatu himpunan yang bagian-bagiannya kongruen (*part-group, congruent parts*).

Konsep pecahan yang diberikan pertama kali adalah pecahan  $\frac{1}{2}$ , kemudian secara berurutan pecahan  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$  dan  $\frac{3}{4}$ . Tahapan pada proses pengumpulan data adalah sebagai berikut : Pada pecahan " $\frac{1}{2}$ ":

- (1) Subjek diberi pilihan benda nyata, antara lain:
  - Kue roti (berbentuk lingkaran, persegi, dan persegipanjang), semangka, coklat silver queen (Bagian I)
  - Dua unit boneka, 2 unit kelereng, dan 2 unit jepit rambut (Bagian II)
  - Alat perlengkapan, antara lain pisau, gunting, kertas HVS, bollpoint.
- (2) Melalui contoh-contoh kongkrit tersebut, tujuannya agar subjek mampu menggunakan bahan manipulatif untuk memahami konsep pecahan.
- (3) Pada tahap ini, peneliti ingin mengeksplorasi makna membagi sama rata (*fair sharing*) bagi subjek
- (4) Selain tujuan tersebut peneliti ingin mengetahui apakah subjek dapat memaknai hubungan antara kumpulan bagian-bagian dan keseluruhan pada kegiatan membagi-bagi kue (enaktif). Hubungan tersebut merupakan ide kunci dari pecahan (*fraction*).
- (5) Ingin mengetahui apakah subjek dapat menyatakan bagian-bagian kue yang dipecah/dibelah dengan representasi-representasi pecahan.

Pertanyaan yang sama akan dilakukan dalam setiap wawancara berbasis tugas untuk pecahan  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ , dan  $\frac{3}{4}$ . Kegiatan tersebut masing-masing melalui dua tahap, yaitu tahap pertama konsep pecahan dapat direpresentasikan sebagai bagian dari suatu daerah yang bagian-bagiannya kongruen (*part-whole, congruent parts*) dan tahap kedua konsep pecahan direpresentasikan sebagai bagian dari suatu himpunan, yang bagian-bagiannya kongruen (*part-group, congruent parts*).

### b. Pada tahap Ikonik

- (1) Subjek diberi kertas-kertas kosong, penggaris, penghapus, pensil/balpoint, kertas tugas. Tujuannya agar subjek memahami konsep pecahan melalui gambar bangun-bangun datar seperti segitiga, persegi, persegipanjang, dan lingkaran dengan memfokuskan pada representasi konsep bagian dari keseluruhan (*part two whole concept*).

- (2) Peneliti Ingin mengeksplorasi makna pecahan bagi subjek melalui gambar-gambar yang dibuat mereka.
- (3) Pada tahap ini, peneliti ingin mengetahui apakah subjek dapat menggambarkan kegiatan membagi/memotong sama besar dalam bentuk gambar-gambar (ikonik) melalui bangun-bangun datar.
- (4) Peneliti ingin mengetahui apakah simbol-simbol yang digunakan subjek untuk menyatakan hubungan kumpulan bagian-bagian terhadap keseluruhan (*part-whole relationship*).

### c. Pada tahap Simbolik

- (1) Subjek diberi kertas-kertas kosong, penghapus, pensil/balpoint.
- (2) Tujuan peneliti ingin mengeksplorasi simbol pecahan yang digunakan subjek pada dua sesi sebelumnya. Misalkan makna “setengah” atau “separo” yang dapat dituliskan/disimbolkan dengan “ $\frac{1}{2}$ ”
- (3) Ingin mengajak atau membimbing subjek dalam menggunakan simbol konvensional (baku) untuk pecahan yaitu  $\frac{a}{b}$
- (4) Pada tahap ini, peneliti ingin mengeksplorasi makna pecahan bagi subjek dengan menyatakan hubungan kumpulan bagian-bagian terhadap keseluruhan (*part-whole relationship*) dengan simbolik.

## HASIL PENELITIAN

Hasil penelitian ini adalah untuk menjawab pertanyaan penelitian tentang bagaimanakah pemahaman siswa sekolah dasar dalam merepresentasikan konsep pecahan. Jenis representasi yang digunakan subjek dalam proses pemahaman konsep pecahan adalah berdasarkan tiga tahapan teori Bruner, yaitu tahap enaktif (*enactive*), ikonik (*iconic*), dan simbolik (*symbolic*). Data penelitian diungkap melalui wawancara berbasis tugas terhadap beberapa subjek penelitian.

Deskripsi petikan wawancara dengan subjek F, pecahan “1/3” disajikan sebagai berikut:

P :Perhatikan benda-benda konkrit di hadapan kalian, kemudian coba sebutkan masing-masing nama-nama benda tersebut.

F :Roti ulat, roti persegi, roti persegi panjang, semangka, apel, telur asin dan coklat silver queen. J(e,1,01)

P :Ambil salah satu benda tersebut yang paling kalian sukai.

F :Memikir sejenak untuk melakukan pemilihan J(e,1,02)

P :Apakah nama benda yang kalian ambil itu?

F :cokelat yang sudah terpartisi menjadi tiga bagian J(e,1,03)

P :Ada berapa unit benda yang kalian ambil?

F :Satu J(e,1,04)

P :Ambilah alat untuk memotong/ mengiris/ membelah benda yang kalian pilih.

F :Subjek langsung mengambil pisau J(e,1,05)

P :Coba, kalian belah/iris menjadi tiga bagian sama besar benda yang ada dihadapan kalian.

J(e,1,06)

F :Dengan semangat, subjek melakukan pekerjaan memotong/mengiris coklat dengan penuh hati-hati J(e,1,07)


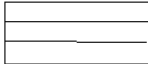
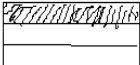
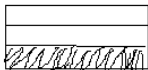
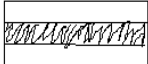
P :Setelah kalian iris/belah, ada berapa banyak bagian benda sekarang?

F :tiga pak! J(e,1,08)

P :Apakah ‘ketiga’ benda ini sama besar?

F :ya pak, sama besar J(e,1,09)

P :Apakah bagian-bagian itu bentuknya sama?

- F :sama pak, J(e,1,10)
- P :Baiklah, sekarang ambilah satu benda belahan tadi !
- F :subjek mengambil satu bagian dari tiga bagian J(e,1,11)
- P :Ada berapa bagian dari belahan benda yang kalian ambil tersebut?
- F :satu pak J(e,1,12)
- P :Wow, coba bapak ulangi lagi, ada berapa bagian dari **keseluruhan** benda yang telah terambil?
- F :dengan tegas menjawab “satu pak” J(e,1,13)
- P :Perhatikan pertanyaan bapak ini, apabila tiga bagian benda hasil irisan kalian tadi masing-masing dibagikan kepada tiga teman kalian, akan mendapat berapa bagiankah masing-masing teman kalian tadi?
- F :”satu pertiga” J(e,1,14)
- P :Baiklah, adakah kata lain dari “satu pertiga”?
- F :hem,...hem.... “sepertiga” J(e,1,15)
- P :Okey, kira-kira, apakah kata “satu pertiga” itu termasuk bilangan pecahan?
- F :ya pak J(e,1,16)
- P :Perhatikan gambar bangun datar-bangun datar di hadapan kalian, kemudian coba sebutkan masing-masing nama-nama bangun tersebut.
- F :segitiga, persegi, persegi panjang dan lingkaran J(i,1,17)
- P :Pilih salah satu bangun tersebut yang paling kalian sukai.
- F :Memikir sejenak untuk melakukan pemilihan J(i,1,18)
- P :Apakah nama benda yang kalian ambil itu?
- F :persegi panjang J(i,1,19)
- 
- P :Ada berapa unit benda yang kalian pilih?
- F :Satu J(i,1,20)
- P :Gambar bangun datar yang kalian pilih menjadi tiga bagian yang sama.
- F :Subjek langsung mengambil pensil dan penggaris untuk melakukan partisi
- 
- J(i,1,21)
- P :Apakah ‘ke-tiga’ gambar belahan/partisi ini sama besar?
- F :ya pak, sama besar J(i,1,22)
- P :Apakah bagian-bagian itu bentuknya sama?
- F :sama pak, sama J(i,1,23)
- P :Baiklah, sekarang tandai dengan arsiran yang menyatakan bagian “1/3”
- F :subjek melakukan arsiran salah satu bagian. J(i,1,24)
- 
- P :Bagian yang diarsir/ditandai tersebut menyatakan pecahan berapa?
- F :satu pertiga J(i,1,25)
- P :Apakah kalian bisa memberikan tanda/arsiran lain, selain yang kalian tandai tadi?
- 
- F : J(i,1,26)
- P :Bisa bentuk yang lain lagi?
- F :Bisa pak J(i,1,27)
- 
- P :Dapatkah kalian menuliskan lambang atau simbol satu pertiga?

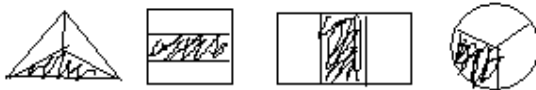
- F :bisa pak, subjek menulis ”  $\frac{1}{3}$  ” J(s,1,28)  
 P :Berapa banyak keseluruhan gambar potongan persegi panjang tadi?  
 F :”3” J(s,1,29)  
 P :Jadi angka 1 pada bilangan pecahan  $\frac{1}{3}$  itu artinya apa?  
 F :satu (1) artinya bagian irisan yang ditandai atau yang diarsir J(s,1,30)  
 P :Sedangkan angka 3 pada bilangan pecahan  $\frac{1}{3}$  artinya apa?  
 F :tiga (3) bagian keseluruhan yang dipotong sama J(s,1,31)  
 P :Jadi, kalau begitu pecahan  $\frac{1}{3}$  itu dibaca apa ?  
 F :”sepertiga” atau “satu pertiga” J(s,1,32)  
 P :Baikalah, kalau begitu simbol pecahan “ $\frac{1}{3}$ ” itu artinya apa?  
 F :satu utuh dibagi atau dipecah menjadi tiga bagian sama J(s,1,33)  
 P :Maksud saya, kalau kalian mempunyai sebuah apel, lalu makna atau arti simbol untuk pecahan  $\frac{1}{3}$  ini apa?  
 F :sebuah apel dibelah jadi 3 bagian yang sama, lalu setiap bagian besarnya sama yaitu satu pertiga J(s,1,34)  
 P :Okey, sekarang kalau bapak punya gambar persegi; bagian persegi yang mana sehingga disebut bagian  $\frac{1}{3}$  itu, coba gambarkan?



- F : yang diarsir menyatakan bagian  $\frac{1}{3}$  J(s,1,35)  
 P :Bagaimana kalau bagian-bagian belahan tadi tidak sama besar? Apakah belahan-belahan tadi masih bisa disebut bagian  $\frac{1}{3}$  ?Perhatikan gambar

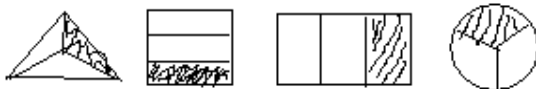


- F :bukan  $\frac{1}{3}$  J(s,1,36)  
 P :Nah, didepan kalian ada gambar-gambar bangun datar, coba berilah tanda arisiran daerah atau bagian mana yang menyatakan pecahan  $\frac{1}{3}$  ?  
 F :Subjek memberi tanda bayang-bayang atau arisiran pada setiap gambar, hasil gambarnya adalah:



J(s,1,37)

- P :Apakah kalian bisa mengarsir untuk bagian-bagian yang lain yang menyatakan bagian  $\frac{1}{3}$  ?  
 F :Bisa pak J(s,1,38)



Hasil deskripsi wawancara dengan subjek F (Fikri) dengan konsep pecahan “satu pertiga” pada setiap tahapan representasi Bruner menunjukkan bahwa: (1) Subjek telah mampu melakukan kegiatan mengiris/membelah objek real (kegiatan enaktif) dan atau mempartisi/membagi gambar bidang datar menjadi bagian-bagian yang sama dan mampu membagi sama rata (*fair sharing*). (2) Subjek memahami bahwa hasil belahan/iris dan atau partisi terbentuk menjadi bagian-bagian (potongan-potongan) yang lebih kecil dengan bentuk dan ukuran yang sama (kongruen). (3) Subjek telah memahami bahwa hasil potongan-potongan/belahan-belahan tersebut menyatakan bagian atau pecahan ”sepertiga/ satu pertiga” dari keseluruhan yang terdiri atas tiga bagian sama. (4) Subjek telah mengenal simbol sepertiga yaitu “ $\frac{1}{3}$ ” dan mampu

memaknai konsep “sepertiga” atau “satu pertiga” baik pada kegiatan enaktif maupun ikonik pada petikan wawancara:  $J(e,1,14)$ ,  $J(e,1,15)$ ,  $J(i,1,24)$  s.d.  $J(i,1,28)$ ,  $J(s,1,35)$  s.d.  $J(s,1,38)$ . (5) Subjek juga telah mampu mereorganisasikan struktur konsep pecahan (menyusun menjadi bagian yang diambil/ditandai, mengorganisasikan atas bagian-bagian sama, bagian-bagian keseluruhan). (6). Subjek telah memberikan argumen atau alasan terhadap keputusan yang dibuat, misalnya tidak melakukan membagi dengan tidak sama besar yang selalu membagi/membelah/mengiris menjadi potongan-potongan sama besar. (7) Subjek telah mampu menunjukkan ringkasan aktivitasnya selama pemahaman konsep pecahan, misalnya memaknai simbol “ $\frac{1}{3}$ ” baik pada tahap enaktif (melakukan kegiatan membelah/mengiris, dapat menentukan bagian yang diambil/diperhatikan melalui objek riil) maupun tahap ikonik (melakukan kegiatan mempartisi/menandai melalui gambar-gambar bidang datar).

## SIMPULAN

1. Pada tahap pengenalan (*recognition*), kedua subjek telah mengingat kembali tentang aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan makna membagi rata (*fair sharing*), misal melalui kegiatan proses membelah/mengiris/membagi kue. Subjek dapat mengidentifikasi aktivitas sebelumnya yang berkaitan dengan pemahaman konsep pecahan, yaitu berupa bagian yang diambil atau ditandai dan bagian dari keseluruhan yang terdiri atas bagian-bagian yang sama. Mereka juga telah melakukan *representasi* ucapan berupa kata-kata “separo”, “setengah”, bilangan “ $\frac{1}{2}$ ” merupakan simbol bilangan matematika untuk membantu merekonstruksi konsep pecahan melalui tahapan enaktif. Subjek juga dapat mentransformasikan informasi atau struktur ke dalam model matematika, walaupun hanya berupa kata-kata yang ungkapannya kurang sempurna, yaitu berupa (1) “*satu bagian dari dua bagian*” ( $J(1/2-11124)$ ), (2) “*Satu kelereng dari keseluruhan dua kelereng yang sama*” ( $J(1/2-12110)$ ). Pada tahap enaktif ini pula telah dilakukan, misalnya subjek merefleksi aktivitas sebelumnya kepada situasi baru (berupa kata “dipotong-potong”, “diambil sebagian”, “dibagi”, “separo”, “setengah”, “satu perdua”). Kemudian, mereka juga telah mereorganisasikan struktur konsep pecahan (menyusun menjadi bagian yang diambil/ditandai, mengorganisasikan atas bagian-bagian sama, bagian-bagian keseluruhan, dan mengembangkan dalam jumlah atau bagian berbeda yang lain). Subjek telah memberikan argumen atau alasan terhadap keputusan yang dibuat, misalnya tidak melakukan membagi dengan tidak sama besar yang selalu membagi/membelah/mengiris sama besar, mampu menunjukkan ringkasan aktivitasnya selama pemahaman konsep pecahan, misalnya benda kongkrit hanya bisa terbagi atas sama besar, jika tidak sama besar, maka tidak bisa dikatakan mendapat bagian separo atau setengahnya, sehingga bagian-bagian tersebut harus sama besar.
2. Pada awal tahapan Enaktif, kedua siswa laki-laki dan perempuan tersebut dalam mengabstraksi konsep pecahan (melalui kegiatan mengkonstruksi) makna “setengah” atau “separo” melalui model konsep bagian keseluruhan (*part two whole concept*) cenderung lebih memahami dibanding melalui model konsep hubungan kumpulan bagian-bagian terhadap keseluruhan (*part-whole relationship*). Hal ini terjadi karena secara empiris (melalui benda-benda kongkrit), pada model pertama (konsep bagian keseluruhan dari satu unit utuh) hasil belahan/ potongan benda tersebut nampak

bagian separo/setengah dari keseluruhan, sedangkan pada model ke-dua yaitu satu bagian dari dua bagian keseluruhan yang sama itu siswa cenderung sulit memahami/mengkonstruksi makna pecahan setengah/separo. Jadi kemampuan mengkonstruksi pecahan setengah/separo melalui tahap enaktif cenderung sama, tidak ada perbedaan secara signifikan kedua siswa tersebut.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ainsworth, Shaaron. 2009. *The Functions of Multiple Representations*. (<http://www.psychology.nottingham.ac.uk/staff/sea/Functions.pdf>, diakses tanggal 12 Oktober 2009).
- Arcavi, Abraham. 2009. *The Role of Visual Representations in the Learning Mathematics*. (<http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>, diakses tanggal 13 Oktober 2009).
- Bennet, A.B. & L.T. Nelson. 2004. *Mathematics for Elementary Teacher*. Edisi Keenam. New York: McGraw Hill.
- Bokhoven. 1996. *Journal research mathematics and education (JRME)* volume 27 hal.216.
- Borg & Gall. 1983. *Educational Research: An Introduction*. Fourth Edition. New York: Longman, Inc.
- Cifarelli, V.V. 1988. *The Role of Abstraction as a Learning Process in Mathematical Problem Solving* *Doctoral Dissertation*, Purdue University, Indiana.
- Goldin, G., & Shteingold, N. 2008. Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & S. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (hal. 1-23). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Gray, E. & Tall, D. 2007. Abstraction as a Natural Process of Mental Compression. *Mathematicx Education Research Journal*. Vol. 19, No.2, 23-40
- Harries, T. & Sutherland. 2009. *The Representation of Mathematical Concepts in Primary Mathematics Textbooks: A Focus On Multiplication*. (<http://math.unipa.it/~grim/Jharries.PDF>, diakses tanggal 12 September 2009).
- Hershkowitz, dkk. 2001. Abstraction in Context. *Journal for Research in Mathematics Education*. Volume 32, Number 2, 2001, 195 – 222.
- Hitt, F. 2001. *Construction of mathematical concepts and internal cognitive frames*. [on-line]. Available: <http://www.matedu.cinvestav.mx/Hitt-w.pdf>. [ 11 Januari 2011].
- Hudojo, Herman. 2005. *Kapita selekta Pembelajaran Matematika*. Malang: IMSTEP.
- Hudojo, Herman. 1988. *Mengajar Belajar Matematika*, Jakarta: Direktorat Pendidikan dan.
- Hwang, dkk. 2009. *Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving using a Multimedia Whiteboard System*. ([www.ifets.info/journals/10\\_2/17.pdf](http://www.ifets.info/journals/10_2/17.pdf), diakses tanggal 12 Nopember 2009)



- 
- Izsák, Andrew. 2003. "We Want a Statement That Is Always True": Criteria for Good Algebraic Representations and the Development of Modelling Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*. Volume 34, Number 3, 2003, 191 – 227.
- Jones, A.D. 2000. *The fifth process standard: An argument to include representation in standards 2000*. [on-line]. Available: <http://www.math.umd.edu/~dac /650/ jonespaper.html> [10 Januari 2011].
- Kato, dkk. 2002. Young Children's Representation of Groups Object: The Relationship Between Abstraction and Representation. *Journal Sor Research in Mathematics Education*. Volume 33, Number 1, 2002, 30 – 45.
- Lamon, S.J. 2001. Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F.R. Curcio (Eds.). *The roles of representation in shool mathematics* (pp. 146-165). Reston: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Lamon, S.J. 2006. *Teaching fractions and rations for understanding*, Secondedition. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Luitel, Bal Chandra. 2009. *Representation: Revisited*. (<http://au.geocities.com/bcluitel/Representation-revisited>, diakses tanggal 13 September 2009).
- Mallet, Dan G. 2009. *Multiple Representations for Systems of Linear Equations Via the Computer Algebra System Maple*. ([www.iejme.com/022008 /d2.pdf](http://www.iejme.com/022008 /d2.pdf), diakses tanggal 12 September 2009).
- Macmillan Mathematics. 2009. *Fractions*. (<http://www.bookrags.com/research /Fractions-mmam-02/>, diakses tanggal 17 Oktober 2009).
- Miles & Huberman. 1992. *Analisis Data Kualitatif*. Terjemahan oleh Tjetjep Rohendi Rohidi. Jakarta: UI Press
- NCTMa. 2009. *Representation*. (<http://nctm.org/rep.html>, diakses tanggal 13 September 2009).
- NCTMb. 2009. Representation—Show Me the Math! (<http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=224&blogid=68>, diakses tanggal 13 September 2009).
- Nellisen, Jo M. C. & Welco Tomic. 2008. *Representations in Mathematics Education*. ([http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content\\_sto- rage\\_01/0000019b/80/17/80/85.pdf](http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_sto- rage_01/0000019b/80/17/80/85.pdf), diakses tanggal 13 September 2008).
- Orton, A., 1992. *Learning Mathematics: Issues, Theory and Practice*, Great Britain: Redwood Books.
- Pyke, Curtis L. 2003. The Use of Symbols, Words, and Diagrams as Indicators of Mathematical Cognition: A Causal Model. *Journal for Research in Mathematics Education*. Volume 34, Number 5, 2003, 406 – 432.
- Pantazi, dkk. 2009. *Elementary School Students' Mental Representations OSSractions*. ([http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR216\\_Pitta-Pantazi.pdf](http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR216_Pitta-Pantazi.pdf), diakses tanggal 14 Oktober 2009).

---

Skemp, Richard R. 1982. *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth: Pinguin Books Ltd.

Solso, Robert L. 1995. *Cognitive Psychology*. fourth Edition, Boston: University of Nevada-Reno.

Tall, David.. 1991. *The psychology of advanced mathematical thinking*. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp.3-23). Kluwer: The Netherlands.